

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 629.78

РАСЧЕТ ВОЗМУЩЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА МЕЖДУ ОКОЛОЗЕМНОЙ И ОКОЛОЛУННОЙ ОРБИТАМИ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Петухов В.Г.* , Чжоу Жуи**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия*

** e-mail: vgpethov@gmail.com*

*** e-mail: 420790076@qq.com*

Статья поступила в редакцию 02.04.2019

Предлагается новый метод решения задачи расчета возмущенной двухимпульсной траектории перелета за заданное время между круговыми околоземной и окололунной орбитами заданной высоты и наклона. На всех участках траектории учитываются ускорения сил притяжения Земли, Луны и Солнца как точечных масс и ускорение от второй зональной гармоники геопотенциала. Расчет траектории перелета сводится к решению двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработанный метод основан на методе продолжения и не требует начального приближения для решения краевой задачи.

Ключевые слова: траектория перелета к Луне, двухимпульсный перелет, окололунная орбита, метод продолжения, проектно-баллистический анализ

Введение

Рассматривается задача расчета двухимпульсного перелета между орбитами искусственных спутников Земли и Луны с учетом влияния основных возмущающих ускорений. Постановка задачи не является новой и многократно рассматривалась в связи с подготовкой и реализацией программ исследования Луны с помощью автоматических и пилотируемых космических аппаратов (КА), например в [1–9]. Однако учет сил притяжения Земли, Луны и Солнца на всех участках

перелета, существенный для обеспечения практически требуемой точности вычислений, приводит к необходимости решения достаточно сложной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Существующие методы решения позволяют решать такую краевую задачу, однако остается задача обеспечения вычислительной устойчивости метода при проведении расчета большого числа траекторий, необходимого для проектно-баллистического анализа перспективных лунных миссий.

В этой статье предлагается применить к решению краевой задачи перелета между круговыми околоземной и окололунной орбитами устойчивый метод продолжения по параметру [10–14], хорошо зарекомендовавший себя в задачах оптимизации траекторий КА с малой тягой.

В первом разделе статьи приводится рассматриваемая схема перелета, во втором разделе – математическая модель движения КА, в которой задача расчета траектории сводится к краевой задаче с тремя неизвестными параметрами для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение КА в системе Земля–Луна. В третьем разделе приводится описание метода решения краевой задачи, который состоит из метода вычисления начального приближения и метода решения краевой задачи с использованием продолжения по параметру. В последнем разделе приведен численный пример с расчетами зависимостей основных траекторных параметров от даты старта и длительности перелета.

1. Схема перелета

Рассматривается задача расчета двухимпульсного перелета между круговыми околоземной и окололунной орбитами с заданными высотами и наклонениями за заданное время. Используется математическая модель движения, учитывающая на всех участках движения КА притяжение Земли, Луны и Солнца как точечных масс и вторую зональную гармонику гравитационного потенциала Земли. Первый импульс скорости выдается на начальной околоземной орбите и выводит КА на траекторию перелета к Луне. В момент пролета Луны на минимальном расстоянии выдается второй импульс скорости, переводящий КА на окололунную орбиту. Для минимизации суммарного импульса скорости полагается, что импульс скорости при отлете с околоземной орбиты должен быть направлен вдоль вектора геоцентрической скорости КА, а при выведении на орбиту вокруг Луны – против вектора селеноцентрической скорости КА. Рассматриваемая схема перелета между круговыми орбитами околоземной и окололунной представлена на рис. 1.

Исходными данными для вычисления траектории являются: время выдачи первого импульса t_0 , высота h_0 и наклонение i_0 начальной круговой околоземной орбиты, время перелета T (промежуток времени между моментами выдачи первого и второго импульсов скорости), высота h_k и наклонение i_k конечной круговой окололунной орбиты.

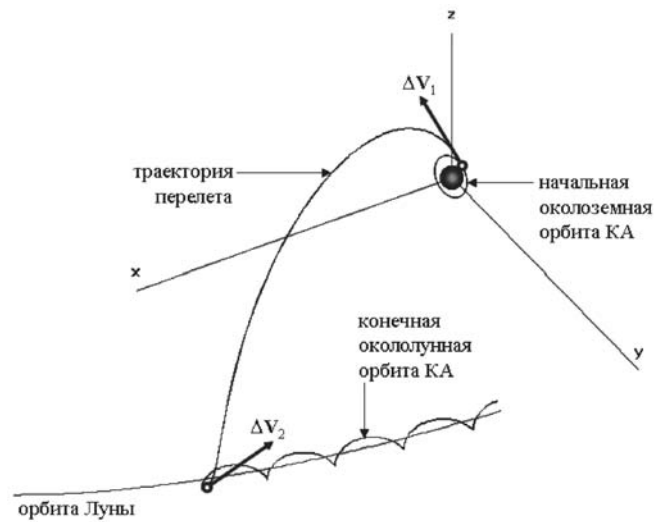


Рис. 1. Схема перелета между орбитами околоземной и окололунной

Для решения задачи требуется вычислить вектор отлетного импульса скорости ΔV_1 . Условие коллинеарности ΔV_1 текущему вектору орбитальной скорости КА делает задачу вычисления ΔV_1 эквивалентной задаче вычисления $\Delta V_1 = |\Delta V_1|$, долготы восходящего узла Ω_0 начальной околоземной орбиты и аргумента широты точки приложения первого импульса скорости на этой орбите u_0 . Кроме параметров ΔV_1 , Ω_0 и u_0 , необходимо вычислить величину второго импульса скорости ΔV_2 и долготу восходящего узла конечной окололунной орбиты Ω_k , которая в рамках рассматриваемой постановки задачи предполагается заданной.

2. Математическая модель движения

В данной работе математическая модель КА основана на дифференциальных уравнениях движения в инерциальной геоцентрической системе координат EME2000, отнесенной к среднему экватору и среднему равноденствию в фундаментальную эпоху J2000 – 12 часов 1 января 2000 г. в шкале земного времени (ТТ). Для анализа селеноцентрического движения КА используется инерциальная селеноцентрическая селеноэкваториальная система координат LME2000.

Прямое восхождение α_p и склонение δ_p (в градусах) вектора в направлении Северного полюса Луны в системе координат EME2000 определяются соотношениями [15]:

$$\alpha_p = 269.9949 + 0.0031T - 3.8787 \sin E_1 - 0.1204 \sin E_2 + 0.0700 \sin E_3 - 0.0172 \sin E_4 + 0.0072 \sin E_6 - 0.0052 \sin E_{10} + 0.0043 \sin E_{13}; \quad (1)$$

$$\delta_p = 66.5392 + 0.0130T + 1.5419 \cos E_1 + 0.0239 \cos E_2 - 0.0278 \cos E_3 + 0.0068 \cos E_4 - 0.0029 \cos E_6 + 0.0009 \cos E_7 + 0.0008 \cos E_{10} - 0.0009 \cos E_{13},$$

где $T = (JD(TDB) - 2451545.0)/36525$;

$JD(TDB)$ – юлианская дата в масштабе динамического барицентрического времени (ТДВ); тригонометрические аргументы (в градусах) имеют вид

$$\begin{aligned} E_1 &= 125.045 - 0.0529921d; \\ E_2 &= 250.089 - 0.1059842d; \\ E_3 &= 260.008 + 13.0120009d; \\ E_4 &= 176.625 + 13.3407154d; \\ E_6 &= 311.589 + 26.4057084d; \\ E_7 &= 134.963 + 13.0649930d; \\ E_{10} &= 15.134 - 0.1589763d; \\ E_{13} &= 25.053 + 12.9590088d; \end{aligned} \quad (2)$$

$d = JD(TDB) - 2451545$ – число суток с 12 часов 1 января 2000 года (фундаментальная эпоха J2000).

Единичный вектор в направлении Северного полюса Луны в системе координат ЕМЕ2000 записывается в виде:

$$\mathbf{e}_z = (\cos \alpha_p \cos \delta_p, \sin \alpha_p \cos \delta_p, \sin \alpha_p)^T; \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_3 / |\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_3|, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x, \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ – единичный вектор в направлении оси Z системы координат ЕМЕ2000.

Таким образом, матрица перехода от селеноцентрических координат КА в LME2000 \mathbf{x}_{LME} к геоцентрическим координатам КА в ЕМЕ2000 \mathbf{x}_{EME} имеет вид:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) : \mathbf{x}_{EME} = \mathbf{M} \mathbf{x}_{LME}, \quad \mathbf{x}_{LME} = \mathbf{M}^T \mathbf{x}_{EME}. \quad (5)$$

Для вычисления геоцентрических координат Луны и Солнца, а также компонент вектора геоцентрической скорости Луны используется эфемеридное программно-математическое обеспечение JPL DE405 [16].

Входным параметром эфемеридного обеспечения DE405 является юлианская дата в шкале динамического барицентрического времени (ТДВ). Динамическое барицентрическое время равно сумме земного времени (ТТ) и периодических коррекций. В свою очередь, земное время связано со всемирным координированным временем (UTC) соотношением

$$TT = UTC + NLS + 32.184 \text{ с}, \quad (6)$$

где NLS (number of leap seconds) – число секунд коррекции. По состоянию на начало 2019 года $NLS = 37$ с. Выражение для расчета ТДВ по известному ТТ имеет вид:

$$\begin{aligned} TDB = TT + 0.001657 \sin(628.3076T + 6.2401) + \\ + 0.000022 \sin(575.3385T + 4.2970) + \\ + 0.000014 \sin(1256.6152T + 6.1969) + \\ + 0.000005 \sin(606.9777T + 4.0212) + \\ + 0.000005 \sin(52.9691T + 0.4444) + \\ + 0.000002 \sin(21.3299T + 5.5431) + \\ + 0.000010T \sin(628.3076T + 4.24) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты приведены в секундах, угловые аргументы – в радианах, а $T = (JD(TT) - 2451545.0)/36525$ – число юлианских столетий в земном времени ТТ от фундаментальной эпохи J2000.

При расчете траектории КА учитывались основные внешние ускорения, включающие в себя ускорения от сил притяжения Земли, Луны и Солнца как материальных точек и ускорение от второй зональной гармоники геопотенциала. В инерциальной геоцентрической системе координат ЕМЕ2000 уравнения движения КА с учетом этих ускорений имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{x} + \mathbf{a}_{J2} + \mu_M \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_M - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_M}{r_M^3} \right) + \\ + \mu_S \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_S}{r_S^3} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ – вектор геоцентрического удаления КА; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ – вектор геоцентрической скорости КА; t – время (в шкале всемирного координированного времени UTC); \mathbf{x}_M – вектор гео-

центрического положения Луны; \mathbf{x}_S – вектор геоцентрического положения Солнца; $r = |\mathbf{x}|$ – геоцентрическое удаление КА; $r_M = |\mathbf{x}_M|$ – геоцентрическое удаление Луны; $r_S = |\mathbf{x}_S|$ – геоцентрическое удаление Солнца; μ_E, μ_M, μ_S – гравитационные параметры Земли, Луны и Солнца соответственно; \mathbf{a}_{J_2} – вектор возмущающего ускорения, обусловленного второй зональной гармоникой геопотенциала:

$$\mathbf{a}_{J_2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_E J_2 R_e^2}{r^5} \begin{pmatrix} \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1\right) x \\ \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1\right) y \\ 5 \left(\frac{z^2}{r^2} - 3\right) z \end{pmatrix}; \quad (9)$$

J_2 – коэффициент второй зональной гармоники геопотенциала; R_e – экваториальный радиус Земли; x, y, z – компоненты вектора геоцентрического удаления КА \mathbf{x} .

В процессе решения краевой задачи может оказаться, что селеноцентрическое удаление КА на некоторых участках некоторых промежуточных траекторий будет меньше радиуса Луны. Это может привести к трудностям при численном интегрировании уравнений движения (8). Во избежание этой ситуации, вводится фиктивное селеноцентрическое удаление КА r_{mc} : если селеноцентрическое удаление КА r_m ($r_m = |\mathbf{x}_m|$, $\mathbf{x}_m = \mathbf{x} - \mathbf{x}_M$) меньше r^* , то r_m в (8) заменяется на фиктивное селеноцентрическое удаление КА:

$$r_{mc} = 0,5 R_M \left(1 + r_m^2 / R_M^2\right), \quad (10)$$

где $R_M = 1738$ км – радиус Луны, $r^* = R_M$. Использование (10) обеспечивает выполнение условий $r_{mc} = r_m$ и $dr_{mc}/dr_m = 1$ при $r_m = R_M$ и $r_{mc} \geq R_M/2$ для любого $r_m \geq 0$. Разумеется, эта замена нужна только для повышения устойчивости численной процедуры при решении краевой задачи. Траектории, являющиеся решением краевой задачи, на каких-либо участках которых селеноцентрическое удаление КА меньше радиуса Луны, не представляют практического интереса и отбраковываются.

Начальные условия движения КА определяются заданными параметрами начальной орбиты (высотой h_0 и наклоном i_0) и неизвестными параметрами краевой задачи – долгой восходящего узла начальной орбиты Ω_0 , аргументом широты u_0 точки приложения первого импульса ско-

рости и величиной первого импульса скорости ΔV_1 .

После выдачи первого импульса скорости КА выводится на траекторию перелета к Луне. В начальной точке этой траектории, в момент времени t_0 векторы геоцентрического положения и геоцентрической скорости имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_0 (\cos u_0 \cos \Omega_0 - \sin u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0); \\ y_0 &= r_0 (\cos u_0 \sin \Omega_0 + \sin u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0); \\ z_0 &= r_0 \sin u_0 \sin i_0; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{x0} &= \sqrt{\frac{\mu_E}{p}} (1+e) \times \\ &\times (-\sin u_0 \cos \Omega_0 - \cos u_0 \sin \Omega_0 \cos i_0); \\ v_{y0} &= \sqrt{\frac{\mu_E}{p}} (1+e) \times \\ &\times (-\sin u_0 \sin \Omega_0 + \cos u_0 \cos \Omega_0 \cos i_0); \\ v_{z0} &= \sqrt{\frac{\mu_E}{p}} (1+e) \cos u_0 \sin i_0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Здесь $r_0 = R_E + h_0$ – геоцентрическое удаление КА в момент выдачи первого импульса скорости; R_E – средний радиус Земли; p, e – оскулирующие фокальный параметр и эксцентриситет геоцентрической орбиты КА соответственно сразу после выдачи первого импульса скорости,

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu_E}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}},$$

где $v_0 = \sqrt{\mu_E/r_0} + \Delta V_1$; $a = \frac{\mu_E r_0}{2\mu_E - r_0 v_0^2}$ – большая полуось орбиты.

В конце траектории перелета, в момент $t_k = t_0 + T$ пролета на минимальном расстоянии от Луны выдается второй импульс скорости ΔV_2 , в результате чего КА переводится на круговую орбиту вокруг Луны заданной высоты и наклона. Для того чтобы это было можно реализовать с минимальным значением ΔV_2 , необходимо, чтобы вектор $\Delta \mathbf{V}_2$ был направлен противоположно вектору скорости КА в момент подлета КА к Луне на минимальное расстояние, а само это расстояние должно равняться заданному радиусу конечной орбиты вокруг Луны. Чтобы удовлетворить все эти условия, в момент t_k на подлетной траек-

тории должны быть выполнены три следующих равенства:

$$\begin{aligned} r_m - (R_M + h_k) &= 0, \\ \mathbf{x}_m^T \mathbf{v}_m &= 0, \\ \frac{c_{mz}}{c_m} - \cos i_k &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{x}_m = \mathbf{M}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M)$ – вектор положения КА в инерциальной селеноцентрической селеноэкваториальной системе координат LME2000;

$\mathbf{v}_m = \mathbf{M}^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M)$ – вектор селеноцентрической скорости КА в инерциальной селеноцентрической селеноэкваториальной системе координат LME2000;

$r_m = |\mathbf{x}_m|$ – селеноцентрическое удаление КА;

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{x}_m \times \mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} c_{mx} \\ c_{my} \\ c_{mz} \end{pmatrix} \text{ – векторная постоянная}$$

площадей селеноцентрического движения КА в момент t_k , $c_m = |\mathbf{c}_m|$.

Таким образом, сформулирована следующая краевая задача: необходимо найти такие заранее не известные значения ΔV_1 , Ω_0 и u_0 , которые после подстановки в начальные условия (11), (12) и интегрирования дифференциальных уравнений движения КА (8) с этими начальными условиями в момент t_0 приводят к таким конечным значениям фазового вектора КА в момент t_k , которые удовлетворяют конечным условиям (13).

После решения этой краевой задачи величина второго импульса скорости вычисляется с использованием следующего соотношения:

$$\Delta V_2 = |\mathbf{v}_m(t_k)| - \sqrt{\frac{\mu_M}{R_M + h_k}}, \quad (14)$$

где $\mathbf{v}_m(t_k) = \mathbf{M}^T (\mathbf{v}(t_k) - \mathbf{v}_M(t_k))$ – селеноцентрическая скорость КА в LME2000.

3. Метод решения краевой задачи

Расчет траектории начального приближения

Расчет траектории начального приближения необходим для обеспечения сходимости решения краевой задачи. Траектория начального приближения рассчитывается как кеплеровская траекто-

рия в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли, касающаяся в начальный момент времени (момент выдачи первого импульса скорости t_0) начальной орбиты ИСЗ и достигающая заданной точки прицеливания в окрестности Луны в конечный момент времени $t_k = t_0 + T$.

Точкой прицеливания может являться центр масс Луны в момент времени t_k с геоцентрическим вектором \mathbf{x}_M . Однако возможно существование нескольких различных типов решений, например решения с подлетом к Луне над южной или северной полусферой. Все эти решения могут представлять интерес при проведении проектно-баллистического анализа. Для обеспечения сходимости краевой задачи и поиска решений с различными условиями подлета КА к Луне введена возможность смещения точки прицеливания относительно центра масс Луны. Смещение точки прицеливания задается проекциями селеноцентрического вектора прицеливания на восточное, северное и радиальное направления. Северное направление определяется единичным вектором в направлении Северного полюса Луны $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}_z$ (формула (3)). Восточное направление определя-

ется единичным вектором $\mathbf{e}_E = \frac{\mathbf{x}_M \times \mathbf{e}_N}{|\mathbf{x}_M \times \mathbf{e}_N|}$, а «радиальное» – единичным вектором $\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_N \times \mathbf{e}_E$.

В общем случае геоцентрический вектор точки прицеливания \mathbf{x}_t определяется выражением

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_M + \Delta r_N \mathbf{e}_N + \Delta r_E \mathbf{e}_E + \Delta r_R \mathbf{e}_R, \quad (15)$$

где Δr_E , Δr_R , Δr_N – компоненты вектора смещения точки прицеливания от центра масс Луны в базисе $(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_N)$.

Алгоритм вычисления траектории начального приближения следующий.

1) Для заданных $t_k = t_0 + T$ и смещений Δr_E , Δr_R , Δr_N по приведенному выше алгоритму вычисляется вектор геоцентрического положения прицельной точки \mathbf{x}_t . Вычисляются прямое восхождение и склонение точки прицеливания в EME2000:

$$\delta_t = \arcsin \frac{z_t}{r_t}, \cos \alpha_t = \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}, \sin \alpha_t = \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}.$$

2) Вычисляется долгота восходящего узла опорной орбиты. Для «северной» траектории перелета к Луне долгота восходящего узла опорной

орбиты для траектории начального приближения определяется соотношением

$$\Omega_0 = -\pi + \alpha_r + \arcsin \frac{\tan \delta_r}{\tan i_0},$$

а для «южной» траектории – соотношением

$$\Omega_0 = \alpha_r - \arcsin \frac{\tan \delta_r}{\tan i_0}.$$

Следует обратить внимание, что оба решения существуют только если наклонение начальной околоземной орбиты i_0 не меньше склонения прицельной точки δ_r .

3) В качестве начального приближения для аргумента широты в момент выдачи первого импульса скорости выбирается $u_0 = 0$. Устанавливается некоторое большое значение для ω^* , например $\omega^* = 10^6$.

4) Вычисляется геоцентрический вектор \mathbf{x}_0 положения КА в EME2000 как вектор положения на круговой орбите радиусом $R_E + h_0$, наклонением i_0 и долготой восходящего узла Ω_0 в точке с аргументом широты u_0 .

5) Решается задача Ламберта о перелете в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли за время T между геоцентрическими положениями, определяемыми векторами \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_r . В результате решения этой задачи Ламберта определяется начальный вектор геоцентрической скорости КА после выдачи первого импульса \mathbf{v}_1 и затем, по известным вектору положения \mathbf{x}_0 и вектору скорости \mathbf{v}_1 КА в начале траектории перелета, определяются орбитальные элементы траектории перелета к прицельной точке: фокальный параметр p_1 , эксцентриситет e_1 , наклонение i_1 , долгота восходящего узла Ω_1 , аргумент перигея ω_1 и истинная аномалия КА в начальной точке траектории v_1 .

6) Проверяется выполнение условия $|\omega_1 - \omega^*| \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность решения. Если это условие выполнено, то производится выход из алгоритма определения траектории начального приближения. Начальное приближение для долготы восходящего узла начальной околоземной орбиты равно Ω_1 , начальное приближение для аргумента широты точки приложения перво-

го импульса скорости равно ω_1 , а начальное приближение для величины первого импульса скорости равно $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0|$, где \mathbf{v}_0 – вектор геоцентрической скорости КА на круговой орбите ИСЗ радиусом $R_E + h_0$, наклонением i_0 и долготой восходящего узла Ω_0 в точке с аргументом широты u_0 .

7) Если условие $|\omega_1 - \omega^*| \leq \varepsilon$ не выполняется, то устанавливается $u_0 = \omega_1$, $\omega^* = \omega_1$ и переходят к п. 4 алгоритма.

Решение краевой задачи методом продолжения по параметру

Для решения краевой задачи используется метод продолжения по параметру [10, 12, 13]. Сущность метода продолжения заключается в формальной редукции рассматриваемой краевой задачи к задаче Коши. Краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (8) с краевыми условиями (11)–(13) можно представить в виде уравнения для невязок на правом конце траектории:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{z} = (u_0, \Omega_0, \Delta V_1)$ – вектор неизвестных параметров краевой задачи; вектор \mathbf{f} состоит из правых частей конечных условий (13).

При некотором начальном приближении для неизвестных параметров краевой задачи \mathbf{z}_0 вычислим вектор невязок (16):

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}. \quad (17)$$

Рассмотрим погружение уравнения (16) в однопараметрическое семейство

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1 - \tau)\mathbf{b}, \quad (18)$$

где τ – параметр продолжения, и представим вектор \mathbf{z} в виде функции от этого параметра: $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$, причем $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ из уравнения (17). Потребуем выполнения равенства (18) для любого $0 \leq \tau \leq 1$. Очевидно, что при $\tau = 0$ уравнение (18) совпадает с (17), а при $\tau = 1$ – с уравнением для невязок для искомой краевой задачи (16).

Уравнение (18) фактически представляет ньютоновскую гомотопию между системой уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{z}) - \mathbf{b} = 0$ с известным решением $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ и исходной системой уравнений $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$.

Дифференцируя уравнение (18) по параметру продолжения τ и разрешая полученное выражение относительно производной $d\mathbf{z}/d\tau$, получим

формальную редукцию уравнения (16) к задаче Коши:

$$\frac{dz}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{b}, \quad (19)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Очевидно, что, интегрируя (19) по τ от 0 до 1, в силу (17), (18) можно определить искомый вектор неизвестных параметров краевой задачи (16) в виде $\mathbf{z} = \mathbf{z}(1)$. Фактически, для рассматриваемой краевой задачи, (19) реализует продолжение по конечным краевым условиям от начального решения, соответствующего начальному приближению для неизвестных параметров краевой задачи, до искомого решения.

Дифференциальные уравнения (19) будем называть дифференциальными уравнениями метода продолжения. Для применимости метода продолжения необходимо существование и невырожденность матрицы частных производных $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ на всем интервале продолжения $\tau \in [0; 1]$. Для улучшения сходимости процесса решения рассматриваемой краевой задачи целесообразно введение параметра продолжения τ в правые части дифференциальных уравнений движения и в краевые условия. В этом случае функция невязок \mathbf{f} явно зависит от параметра продолжения τ , а дифференциальные уравнения метода продолжения примут вид:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = -\mathbf{f}_z^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right). \quad (20)$$

В рассматриваемой краевой задаче параметр продолжения вводится в краевые условия следующим образом:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{z}, \tau) = \tau \mathbf{f}(\mathbf{z}) + (1 - \tau)(\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_t) = 0, \quad (21)$$

а в дифференциальные уравнения движения –

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu_M}{r^3} \mathbf{x} + \tau \left[\mathbf{a}_{J_2} + \mu_M \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_M - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_M}{r_M^3} \right) + \mu_S \cdot \left(\frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_S}{r_S^3} \right) \right]. \quad (22)$$

Краевая задача (21), (22) с соответствующими краевыми условиями обладает следующим свойством: при $\tau = 0$ эта краевая задача соответствует траектории начального приближения (траектории перелета в прицельную точку в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли), а при $\tau = 1$ – задаче перелета на окололунную орбиту с учетом притяжения Луны, Солнца и влияния второй зональной гармоники геопотенциала. При использовании схемы продолжения с заменой в (17), (20) \mathbf{f} на \mathbf{f}_1 и при точном интегрировании дифференциальных уравнений метода продолжения (20), невязки (21) будут оставаться нулевыми на всем интервале продолжения по τ от 0 до 1. Именно этот вариант метода продолжения был использован в этой работе.

Уравнения (22) интегрируются методом Дорманда—Принса 7(8) порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования [17]. Матрица частных производных \mathbf{f}_z вычисляется с помощью метода комплексного шага [18, 19], обеспечивающего точность вычисления первых производных того же порядка, что и точность вычисления самих функций.

4. Численный пример

Будем использовать следующие значения основных астродинамических постоянных [20, 21]:

- гравитационный параметр Земли

$$\mu_E = 398600,4356 \text{ км}^3/\text{с}^2;$$

- гравитационный параметр Луны

$$\mu_M = 4902,799 \text{ км}^3/\text{с}^2;$$

- гравитационный параметр Солнца

$$\mu_S = 1,327124400179870 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2;$$

- средний радиус Земли

$$R_E = 6371 \text{ км};$$

- экваториальный радиус Земли

$$R_e = 6378,17 \text{ км}$$

- коэффициент второй зональной гармоники в разложении геопотенциала

$$J_2 = 1082,628 \cdot 10^{-6};$$

- средний радиус Луны

$$R_M = 1738 \text{ км}$$

Рассмотрим задачу расчета «северной» траектории перелета с круговой орбиты искусственного спутника Земли, имеющей высоту 200 км и наклонение 45°, на круговую орбиту искусственного спутника Луны высотой 100 км с наклонением 90° при длительности перелета 4 суток.

Рассматривается диапазон дат старта с 1 по 30 апреля 2020 г. На рис. 2 приведены зависимости величин первого (вверху слева), второго (вверху справа), суммарного (внизу слева) импульсов скорости и долготы восходящего узла конечной окололунной орбиты в LME2000 от длительности перелета.

ху слева), второго (вверху справа), суммарного (внизу слева) импульсов скорости и долготы восходящего узла конечной окололунной орбиты в LME2000 от длительности перелета.

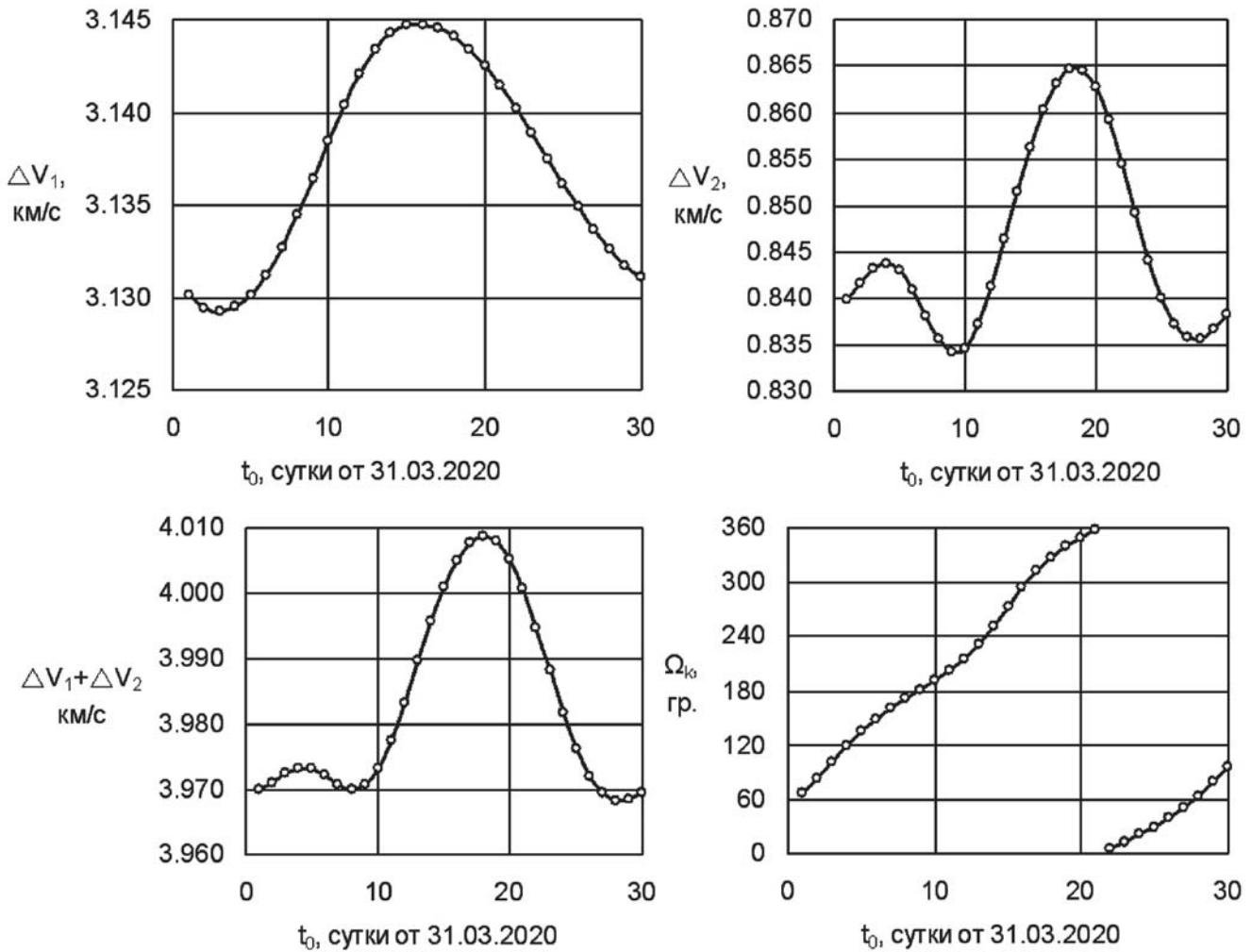


Рис. 2. Зависимости величин первого (вверху слева), второго (вверху справа), суммарного (внизу слева) импульсов скорости и долготы восходящего узла конечной окололунной орбиты в LME2000 от даты старта

рости и долготы восходящего узла конечной окололунной орбиты в LME2000 от даты старта.

Из приведенных графиков видно, что минимум суммарного импульса скорости (3968,3 м/с) достигается при старте 28 апреля 2020 г. При возможности выбора даты старта в течение месяца может быть достигнута окололунная орбита с любой долготой восходящего узла, однако при этом требуется суммарный импульс скорости до 4008,8 м/с. Диапазон изменения первого импульса скорости в зависимости от даты старта составляет 3129,3...3144,8 м/с, а второго — 834,2...864,7 м/с.

На рис. 3 для даты старта 28 апреля 2020 г. представлены зависимости величин первого (ввер-

Выводы

Разработан численный метод расчета двухимпульсных траекторий перелета между круговыми орбитами Земли и Луны за фиксированное время с учетом основных возмущающих ускорений. Метод состоит из процедуры расчета начального приближения с использованием метода точечных сфер действия и процедуры решения краевой задачи для вычисления возмущенной траектории перелета, использующей метод продолжения по параметру для редукции краевой задачи к задаче Коши.

Преимуществом разработанного метода являются автоматизация процедуры выбора начально-

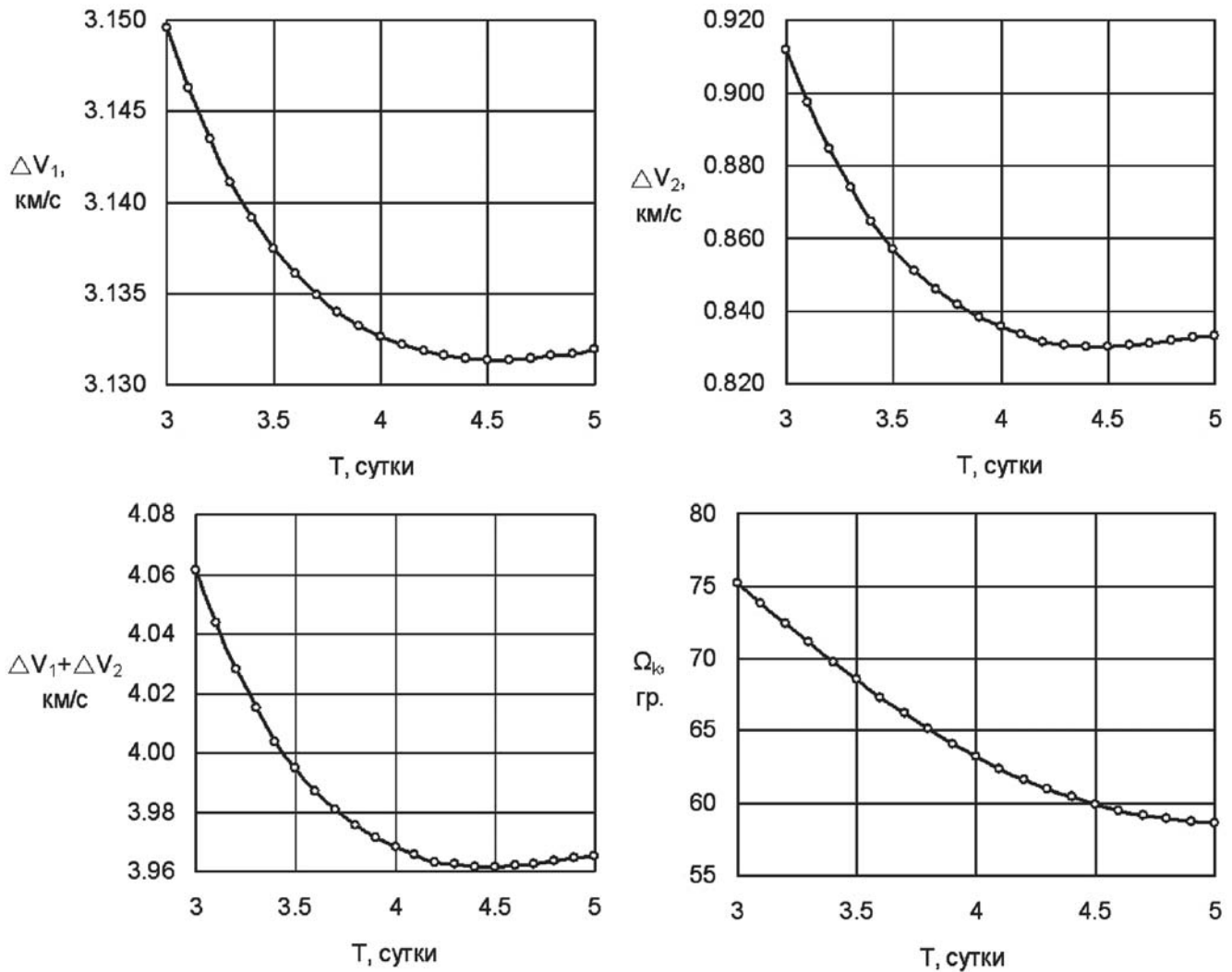


Рис. 3. Зависимости величин первого (вверху слева), второго (вверху справа), суммарного (внизу слева) импульсов скорости и долготы восходящего узла конечной окололунной орбиты LME2000 от длительности перелета

го приближения для решения краевой задачи и вычислительная устойчивость процесса решения самой краевой задачи. Метод показал свою эффективность и вычислительную устойчивость при расчете серии траекторий перелета на полярную круговую орбиту искусственного спутника Луны для различных дат старта и длительностей перелета. Разработанный метод может использоваться при проектно-баллистическом анализе и для оперативного планирования перспективных лунных миссий.

Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (соглашение № 16-19-10429).

Библиографический список

1. *Егоров В.А.* Пространственная задача достижения Луны. — М.: Наука, 1965. — 224 с.
2. *Егоров В.А., Гусев Л.И.* Динамика перелетов между Землей и Луной. — М.: Наука, 1980. — 544 с.
3. *Biesbroek R.* Lunar and Interplanetary Trajectories. — Springer International Publishing Switzerland, 2016. — 227 p.
4. *Jesick M., Ocampo C.* Computation and Optimization of Lunar Orbit Insertion from a Fixed Free Return // The Journal of the Astronautical Sciences. 2011. Vol. 58. No. 1, pp. 35-53. DOI: 10.1007/BF03321158
5. *Tae Soo No, Ji Marn Lee, Gyeong Eon Jeon, Daero Lee.* A Study on Earth-Moon Transfer Orbit Design // Journal of Aeronautical and Space Sciences. 2012. Vol. 13. No. 1, pp. 106-116. DOI: 10.5139/IJASS.2012.13.1.106
6. *Kawakatsu Y., Takizawa Y., Kaneko Y., Ogasawara M.* Application of Phasing Orbit on SELENE Translunar Trajectory // Proceedings of the 22nd International

- Symposium on Space Technology and Science, 2000, pp. 1570-1575.
7. *Kawakatsu Y.* Study on the Characteristics of Two-burn Translunar Trajectory // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Space Technology Japan. 2007. Vol. 7, pp. 9-15. DOI: 10.2322/tstj.5.9
 8. *Adimurthy V., Ramanan R.V., Tandon S.R., Ravikumar C.* Launch strategy for Indian lunar mission and precision injection to the Moon using genetic algorithm // Journal of Earth System Science. 2005. Vol. 114. No. 6, pp. 711-716. DOI: 10.1007/BF02715954
 9. *Parker J.S., Anderson R.L., Peterson A.* Surveying Ballistic Transfers to Low Lunar Orbit // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Vol. 36. No. 5, pp. 1501-1511. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.55661>
 10. *Petukhov V.G.* One Numerical Method to Calculate Optimal Power-Limited Trajectories // International Electric Propulsion Conference. 1995, 8 p.
 11. *Петухов В.Г.* Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004. Т. 42. № 3. С. 260-279.
 12. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 3. С. 224-237.
 13. *Петухов В.Г.* Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 3. С. 258-270.
 14. *Николичев И.А.* Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов с двигателями малой тяги // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 5. С. 66-76.
 15. *Archinal B.A., A'Hearn M.F., Bowell E., Conrad A.* et al. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009 // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. Vol. 109. No. 2, pp. 101-135. DOI: 10.1007/s10569-011-9362-2
 16. *Standish E.M.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // Interoffice memorandum: JPL IOM 312. 26 August 1998. URL: <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>
 17. *Hairer F., Norsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I: Non-Stiff Problems. — 2nd edition. — Springer-Verlag, Berlin, 2011. — 528 p. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1
 18. *Lyness J.N., Moller C.B.* Numerical differentiation of analytic functions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1967. Vol. 4. No. 2, pp. 202-210. DOI: 10.1137/0704019
 19. *Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J.* The complex-step derivative approximation // ACM Transaction on Mathematical Software. 2003. Vol. 29. No. 3, pp. 245-262. DOI: 10.1145/838250.838251
 20. *Luzum B., Capitaine N., Fienga A.* et al. The IAU 2009 system of astronomical constants: the report of the IAU working group on numerical standards for Fundamental Astronomy // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2011. No. 110, pp. 293-304. DOI: 10.1007/s10569-011-9352-4
 21. *Roncoli R.B.* Lunar Constants and Models Document. JPL D-32296. — Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 2005. — 82 p.

COMPUTING THE PERTURBED IMPULSE TRAJECTORY OF TRANSFERRING BETWEEN THE NEAR-EARTH AND NEAR-LUNAR ORBITS BY THE CONTINUATION METHOD

Petukhov V.G.* , Zhou Rui**

*Moscow Aviation Institute (National Research University),
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russia*

* e-mail: vgpetukhov@gmail.com

** e-mail: 420790076@qq.com

Abstract

The problem of computing a two-impulse flight between circular near-Earth and near-lunar orbits with specified altitudes and inclinations over a specified time is considered. A mathematical model of motion, accounting for the Earth, Moon and Sun attractive forces as point masses and the second zonal harmonic

of the Earth gravity potential at all spacecraft movement sections is used. The first velocity impulse is formed at the initial near-Earth orbit, and puts the spacecraft on the lunar flight trajectory. At the Moon passage instant at the minimum distance the second impulse is formed putting the spacecraft on the near-lunar orbit.

A numerical method for calculating two-impulse transfer between the circular orbits of the Earth and the Moon for a fixed time with account for the main perturbing accelerations has been developed. The method consists of the procedure for calculating the guess values, using the method of point-like spheres of impact, and the procedure for solving the boundary value problem for calculating the perturbed flight trajectory using the continuation method for reducing the boundary value problem to the Cauchy problem.

The advantage of the developed method is the procedure automation for selecting the initial guess values for solving the boundary value problem, and the computational stability of the solving process of the boundary value problem itself. The method revealed its efficiency and computational stability when calculating a series of transfers to a polar circular low lunar orbit of an artificial lunar satellite for various start dates and flight durations. The developed method may be applied for the design-ballistic analysis and operational planning of prospective lunar missions.

The article presents the numerical examples of trajectories computing for the flights between the low near-Earth and near-lunar orbits. Computing of the series of such trajectories allowed calculate the optimal start date and optimal flight duration, as well as dependencies of the required velocity impulses and longitude of the ascending node of the near-lunar orbit on start date and flight duration.

Keywords: translunar trajectory, two-impulse trajectory, near-lunar orbit, continuation method, lunar mission analysis and design.

References

1. Egorov V.A. *Prostranstvennaya zadacha dostizheniya Luny* (Spatial problem of reaching the moon), Moscow, Nauka, 1965, 224 p.
2. Egorov V.A., Gusev L.I. *Dinamika pereletov mezhdu Zemlei i Lunoi* (Dynamics of flights between the Earth and the Moon), Moscow, Nauka, 1980, 544 p.
3. Biesbroek R. *Lunar and Interplanetary Trajectories*. Springer International Publishing Switzerland, 2016, 227 p.
4. Jesick M., Ocampo C. Computation and Optimization of Lunar Orbit Insertion from a Fixed Free Return. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2011, vol. 58, no. 1, pp. 35-53. DOI: 10.1007/BF03321158
5. Tae Soo No, Ji Marn Lee, Gyeong Eon Jeon, Daero Lee. A Study on Earth-Moon Transfer Orbit Design. *Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 2012, vol. 13, no. 1, pp. 106-116. DOI: 10.5139/IJASS.2012.13.1.106
6. Kawakatsu Y., Takizawa Y., Kaneko Y., Ogasawara M. Application of Phasing Orbit on SELENE Translunar Trajectory. *Proceedings of the 22nd International Symposium on Space Technology and Science*, 2000, pp. 1570-1575.
7. Kawakatsu Y. Study on the Characteristics of Two-burn Translunar Trajectory. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Space Technology Japan*, 2007, vol. 7, pp. 9-15. DOI: 10.2322/tstj.5.9
8. Adimurthy V., Ramanan R.V., Tandon S.R., Ravikumar C. Launch strategy for Indian lunar mission and precision injection to the Moon using genetic algorithm. *Journal of Earth System Science*, 2005, vol. 114, no. 6, pp. 711-716. DOI: 10.1007/BF02715954
9. Parker J.S., Anderson R.L., Peterson A. Surveying Ballistic Transfers to Low Lunar Orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36, no. 5, pp. 1501-1511. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.55661>
10. Petukhov V.G. One Numerical Method to Calculate Optimal Power-Limited Trajectories. *International Electric Propulsion Conference*, 1995, 8 p.
11. Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2004, vol. 42, no. 3, pp. 260-279.
12. Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 224-237.
13. Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2012, vol. 50, no. 3, pp. 258-270.
14. Nikolichev I. A. Optimization of the multirevolutional non-coplanar low-thrust orbital transfers. *Aerospace MAI Journal*, 2013, vol. 20, no. 5, pp. 66-76.
15. Archinal B.A., A'Hearn M.F., Bowell E., Conrad A. et al. Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, vol. 109, no. 2, pp. 101-135. DOI: 10.1007/s10569-011-9362-2
16. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405. *Interoffice memorandum: JPL IOM 312*. 26 August 1998. URL: <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>
17. Hairer F., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Non-Stiff Problems*. 2-nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 2011, 528 p. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1
18. Lyness J.N., Moller C.B. Numerical differentiation of analytic functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1967, vol. 4, no. 2, pp. 202-210. DOI: 10.1137/0704019
19. Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J. The complex-step derivative approximation. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 2003, vol. 29, no. 3, pp. 245-262. DOI: 10.1145/838250.838251
20. Luzum B., Capitaine N., Fienga A. et al. The IAU 2009 system of astronomical constants: the report of the IAU working group on numerical standards for Fundamental Astronomy. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, no. 110, pp. 293-304. DOI: 10.1007/s10569-011-9352-4
21. Roncoli R.B. *Lunar Constants and Models Document. JPL D-32296*. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 2005, 82 p.