

УДК 623.465.7

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Комиссаренко А.И.

*Конструкторское бюро приборостроения им. академика А.Г. Шипунова,
КБП, ул. Щегловская засека, 59, Тула, 300001, Россия,
e-mail: kbkedr@tula.net*

Рассматриваются вопросы аналитического определения углового положения ракеты с учетом изгибных колебаний корпуса. Корпус ракеты заменен неоднородным стержнем, тяговые, баллистические, весовые, аэродинамические, инерционные характеристики заменяются средними. При исследовании учитываются упругие колебания первого тона. В работе получены аналитические зависимости изменения угла скольжения, угла вектора скорости, угла продольной оси ракеты с учетом упругих колебаний корпуса.

Ключевые слова: упругие колебания, собственные колебания первого тона.

При проектировании ракет с большими удлинениями возникают вопросы о влиянии упругих колебаний на летно-баллистические характеристики. Упругие колебания возникают от силы тяги двигателя, аэродинамических сил. В работе [1] для исследования упругих колебаний ракету заменяют неоднородным стержнем.

Представление ракеты в виде неоднородного стержня значительно упрощает исследование по определению угловых характеристик.

В работе получены дифференциальные уравнения движения ракеты с учетом упругих колебаний.

Представляет интерес определение углового положения ракеты с учетом упругих колебаний аналитическим методом.

Результаты могут быть полезны для научных работников и работников конструкторских предприятий.

В статье при рассмотрении движения ракеты характеристики: тяговые, весовые, аэродинамические, инерционные — заменяются средними.

Учитываются упругие колебания собственных колебаний первого тона. Ввиду того что ускорение ракеты в продольном направлении до величины второго порядка малости не изменяет направления в боковом направлении, рассматриваем поперечное движение независимо от продольного.

В соответствии с [1] дифференциальные уравнения с учетом упругих колебаний представим в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} + a_1\dot{\psi} + a_2\beta + a_3\xi + a_4\dot{\xi} &= a_5\delta; \\ \dot{\varphi} + b_1\beta + b_2\xi + b_3\dot{\xi} &= b_4\delta; \\ \ddot{\xi} + c_1\dot{\xi} + c_2\xi + c_3\beta &= c_4\delta; \\ \varphi + \beta &= \psi.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь

$$a_1 = \frac{(m_z^{\omega_z}) qSl^2}{Y_{zz}V}, \quad q = \frac{\rho V^2}{2};$$

$$a_2 = \frac{(m_z^{\beta}) qSl}{Y_{zz}};$$

$$a_3 = -\frac{1}{Y_{zz}} \left\{ qS \int_0^l \left[(c_z^{\beta}(x) - c_x(x)) f_1'(x)(x_T - x) + c_x(x) f_1(x) \right] dx - F \left[f_1(x_g) + f_1'(x_g)(x_g - x_T) \right] \right\};$$

$$a_4 = \frac{qS}{Y_{zz}V} \int_0^l [c_z^{\beta}(x) - c_x(x)] f_1(x)(x_T - x) dx;$$

$$a_5 = \frac{m_z^{\delta} qSl}{Y_{zz}};$$

$$b_1 = -\frac{c_z^{\beta} qS + F}{mV};$$

$$b_2 = \frac{1}{mV} \left[-qS \int_0^l (c_z^{\beta}(x) - c_x(x)) f_1'(x) dx + F f_1'(x_g) \right];$$

$$b_3 = \frac{1}{mV} qS \int_0^l c_z^{\beta}(x) f_1(x) dx;$$

$$b_4 = \frac{c_z^{\delta} qS}{mV};$$

$$c_1 = 2\varepsilon_1 + \frac{qS}{m_{np}V} \int_0^l (c_z^{\beta}(x) - c(x)) f_1^2 dx;$$

$$c_2 = (\omega_1)^2 - \frac{1}{m_{np}} \left[qS \int_0^l c_z^{\beta}(x) f_1'(x) f_1(x) dx + \frac{F}{m} \int_0^l (f_1')^2 \int_0^x m(x) dx^2 - F f_1'(x_g) f_1(x_g) \right];$$

$$c_3 = -\frac{qS}{m_{np}} \int_0^l c_z^{\beta}(x) f_1(x) dx;$$

$$c_4 = \frac{qS}{m_{np}} \int_0^l c_z^{\delta}(x) f_1(x) dx;$$

$$m_{np} = \int_0^l m(x) f_1^2 dx;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{m_{np}} \int_0^l h(x) f_1^2 dx;$$

$$\omega_1 = \left(\frac{4,73}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EY}{m}};$$

Ψ — угол рыскания;

$\dot{\Psi}$ — угловая скорость угла рыскания;

$\ddot{\Psi}$ — ускорение угла рыскания;

β — угол скольжения;

Φ — угол вектора скорости в горизонтальной плоскости;

ξ — обобщенная координата первого тона поперечных колебаний;

$\dot{\xi}$ — скорость обобщенной координаты первого тона поперечных колебаний;

$\ddot{\xi}$ — ускорение обобщенной координаты первого тона поперечных колебаний;

δ — угол поворота рулей;

V — скорость ракеты;

m — масса ракеты;

m_{np} — приведенная масса ракеты по первому тону;

$h(x)$ — функция трения;

l — длина ракеты;

F — тяга двигательной установки;

f_1 — форма собственных колебаний первого тона;

f_1' — угол наклона касательной к форме собственных колебаний первого тона;

ρ — плотность воздуха;

x_T — расстояние от вершины ракеты до центра масс;

x_g — расстояние от вершины ракеты до точки приложения тяги двигательной установки;

$m_z^{\omega_z}$ — производная от коэффициента аэродинамического демпфирующего момента;

c_z^β — производная от коэффициента боковой аэродинамической силы по углу скольжения;

m_z^β — производная от коэффициента аэродинамического момента по углу скольжения;

m_z^δ — производная от коэффициента аэродинамического момента по углу отклонения рулей;

Y_{zz} — момент инерции ракеты относительно поперечной оси, проходящей через центр масс;

S — площадь миделя;

ϵ_1 — относительный коэффициент затухания упругих колебаний;

ω_1 — частота собственных колебаний первого тона;

E — модуль упругости;

Y — момент инерции относительно продольной оси.

Для решения системы дифференциальных уравнений (1), из третьего уравнения выразим угол скольжения:

$$\beta = \frac{c_4 \delta - \ddot{\xi} - c_1 \dot{\xi} - c_2 \xi}{c^3}. \quad (2)$$

Выражение (2) продифференцируем:

$$\dot{\beta} = \frac{-\ddot{\xi} - c_1 \dot{\xi} - c_2 \xi}{c_3}. \quad (3)$$

Продифференцируем (3):

$$\ddot{\beta} = \frac{-\ddot{\xi} - c_1 \dot{\xi} - c_2 \xi}{c_3}. \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (1) выразим производную угла вектора скорости:

$$\dot{\phi} = b_4 \delta - b_1 \beta - b_2 \dot{\xi} - b_3 \ddot{\xi}. \quad (5)$$

Продифференцируем выражение (5):

$$\ddot{\phi} = -b_1 \dot{\beta} - b_2 \ddot{\xi} - b_3 \ddot{\xi}. \quad (6)$$

Продифференцируем четвертое уравнение системы (1):

$$\dot{\psi} = \dot{\phi} + \dot{\beta}. \quad (7)$$

Продифференцируем выражение (7):

$$\ddot{\psi} = \ddot{\phi} + \ddot{\beta}. \quad (8)$$

В первое уравнение системы (1) подставим (7), (8), затем в полученные выражения (6), (5), (4), (3), (2). Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{b_1}{c_3} (\ddot{\xi} + c_1 \dot{\xi} + c_2 \xi) - b_2 \dot{\xi} - b_3 \ddot{\xi} - \frac{\ddot{\xi} + c_1 \dot{\xi} + c_2 \xi}{c_3} + \\ & + \frac{a_1}{c_3} (b_4 c_3 \delta - b_1 c_4 \delta + b_1 \dot{\xi} + b_1 c_1 \dot{\xi} + b_1 c_2 \xi - b_2 c_3 \xi - \\ & - b_3 c_3 \dot{\xi} - \ddot{\xi} - c_1 \dot{\xi} - c_2 \xi) + \\ & + \frac{a_2}{c_3} (c_4 \delta - \ddot{\xi} - c_1 \dot{\xi} - c_2 \xi + a_3 c_3 \xi + a_4 c_3 \dot{\xi}) = a_5 \delta. \quad (9) \end{aligned}$$

В выражении (9), приводя подобные члены, получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi} + \ddot{\xi} (c_1 + a_1 - b_1) + \dot{\xi} (b_3 c_3 + c_2 + a_1 c_1 + a_2 - b_1 c_1 - a_1 b_1) + \\ & + \dot{\xi} (b_2 c_3 + a_1 b_3 c_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1 - b_1 c_2 - a_1 b_1 c_1 - a_2 a_4 c_3) + \\ & + \xi (a_1 b_2 c_3 + a_2 c_2 - a_1 b_1 c_2 - a_2 a_3 c_3) = \\ & = (a_1 b_4 c_3 + a_2 c_4 - c_3 a_5 - a_1 b_1 c_4) \delta. \quad (10) \end{aligned}$$

В дифференциальном уравнение (10) обозначим:

$$d_1 = c_1 + a_1 - b_1;$$

$$d_2 = b_3 c_3 + c_2 + a_1 c_1 + a_2 - b_1 c_1 - a_1 b_1;$$

$$d_3 = b_2 c_3 + a_1 b_3 c_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1 - b_1 c_2 - a_1 b_1 c_1 - a_2 a_4 c_3; \quad (11)$$

$$d_4 = a_1 b_2 c_3 + a_2 c_2 - a_1 b_1 c_2 - a_2 a_3 c_3;$$

$$d_5 = (a_1 b_4 c_3 + a_2 c_4 - c_3 a_5 - a_1 b_1 c_4) \delta.$$

Тогда уравнение (10) с учетом (11) примет вид

$$\ddot{\xi} + d_1 \dot{\xi} + d_2 \xi + d_3 \dot{\xi} + d_4 \xi = d_5. \quad (12)$$

Однородное уравнение (12) в операторном виде:

$$\lambda^4 + d_1 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_3 \lambda + d_4 = 0. \quad (13)$$

Корни уравнения (13) определяются в соответствии с [2].

Решение однородного уравнения (12) с учетом (13) представим в виде

$$\xi = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 e^{\lambda_4 t}. \quad (14)$$

Произвольные постоянные D_1, D_2, D_3, D_4 определяются с учётом начальных условий.

Определим угол скольжения из третьего уравнения системы (1):

$$\beta = \frac{c_4}{c_3} \delta - \frac{1}{c_3} \xi - \frac{c_1}{c_3} \dot{\xi} - \frac{c_2}{c_3} \ddot{\xi}. \quad (15)$$

Производные $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ определим, используя (14):

$$\dot{\xi} = D_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + D_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t} + D_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 t}; \quad (16)$$

$$\ddot{\xi} = D_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + D_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + D_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 t} + D_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 t}. \quad (17)$$

Подставив в уравнение (15) $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$, получим выражение для угла скольжения:

$$\beta = \frac{c_4 \delta}{c_3} - \frac{c_2 d_5}{c_3 d_4} - \frac{1}{c_3} \sum_{k=1}^4 e^{\lambda_k t} D_k (\lambda_k^2 + c_1 \lambda_k + c_2). \quad (18)$$

Для получения угла вектора скорости из второго уравнения системы (1) выразим ϕ :

$$\phi = b_4 \delta - b_1 \beta - b_2 \dot{\xi} - b_3 \ddot{\xi}. \quad (19)$$

Подставив в уравнение (19) $\beta, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$, получим производную угла вектора скорости

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & b_4 \delta - \frac{b_1 c_4 \delta}{c_3} + \frac{b_1 c_2 d_5}{c_3 d_4} - b_2 \frac{d_5}{d_4} - \\ & - D_1 e^{\lambda_1 t} \left(-\frac{b_1}{c_3} (\lambda_1^2 + c_1 \lambda_1 + c_2) + b_2 + b_3 \lambda_1 \right) - \\ & - D_2 e^{\lambda_2 t} \left(-\frac{b_1}{c_3} (\lambda_2^2 + c_1 \lambda_2 + c_2) + b_2 + b_3 \lambda_2 \right) - \\ & - D_3 e^{\lambda_3 t} \left(-\frac{b_1}{c_3} (\lambda_3^2 + c_1 \lambda_3 + c_2) + b_2 + b_3 \lambda_3 \right) - \\ & - D_4 e^{\lambda_4 t} \left(-\frac{b_1}{c_3} (\lambda_4^2 + c_1 \lambda_4 + c_2) + b_2 + b_3 \lambda_4 \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Интегрируя выражение (20), получим угол вектора скорости:

$$\begin{aligned} \phi = & \left(b_4 \delta - \frac{b_1 c_4 \delta}{c_3} + \frac{b_1 c_2 d_5}{c_3 d_4} - b_2 \frac{d_5}{d_4} \right) (t - t_0) - \\ & - \sum_{k=1}^4 \left(e^{\lambda_k t} - e^{\lambda_k t_0} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times D_k \left(-\frac{b_1}{c_3} \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k} \left(b_2 - \frac{b_1 c_2}{c_3} \right) + b_3 - \frac{b_1 c_1}{c_3} \right). \quad (21)$$

По известным углу скольжения (18) и углу вектора скорости (21), используя четвертое равенство системы (1), определим угол продольной оси ракеты:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{c_4 \delta}{c_3} + \left(b_4 \delta - \frac{b_1 c_4 \delta}{c_3} + \frac{b_1 c_2 d_5}{c_3 d_4} - b_2 \frac{d_5}{d_4} \right) (t - t_0) - \\ & - \sum_{k=1}^4 e^{\lambda_k t} D_k \left[\frac{\lambda_k^2}{c_3} + \lambda_k \left(-\frac{b_1 + c_1}{c_3} \right) + \frac{1}{\lambda_k} \left(b_2 - \frac{b_1 c_2}{c_3} \right) - \frac{b_1 c_1}{c_3} + \right. \\ & \left. + b_3 + \frac{c_2}{c_3} \right] + \sum_{k=1}^4 e^{\lambda_k t_0} D_k \left[-\frac{b_1}{c_3} \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k} \left(-\frac{b_1 c_2}{c_3} + b_2 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{b_1 c_1}{c_3} + b_3 \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

В качестве примера рассматривалась гипотетическая ракета со следующими характеристиками: аэродинамические характеристики

C_x	$C_z^\beta, 1/^\circ$	$C_z^\delta, 1/^\circ$	$m_z^\delta, 1/^\circ$	$m_z^\beta, 1/^\circ$	$m_z^{Wz}, 1/^\circ$
2,8	1,5	0,03	0,051	-0,56	-2,27

плотность воздуха $\rho = 0,125 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$;
 площадь миделя $S = 0,00314 \text{ м}^2$;
 угол поворота рулей $\delta = 20^\circ$;
 длина ракеты $l = 3,44 \text{ м}$;
 момент инерции ракеты относительно поперечной оси $Y_{zz} = 3,1 \text{ кгс}\cdot\text{м}\cdot\text{см}^2$;
 масса ракеты $m = 5,1 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}$;
 скорость ракеты $V = 1321 \text{ м/с}$;
 расстояние от вершины ракеты до центра масс $x_m = 1,82 \text{ м}$;
 расстояние от вершины ракеты до точки приложения тяги двигателя $x_{\text{д}} = 2,10 \text{ м}$;
 распределение массы по длине ракеты

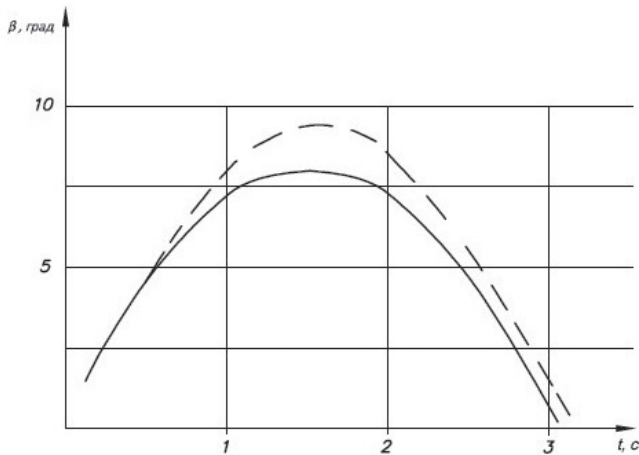
$X, \text{ м}$	0	0,3	0,3	0,8	0,8	1,3	1,3	1,4	1,4	2,7	2,7	3,44
$m, \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}$	0,2	0,2	3,4	3,4	0,5	0,5	0,3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,3

тяга двигательной установки $F = 2580 \text{ кгс}$;
 частота собственных колебаний первого тона $w_1 = 22,3 \text{ 1/с}$;

форма собственных колебаний первого тона в функции длины ракеты

$X, \text{ м}$	0	0,25	0,5	1	1,5	1,75	2	2,5	3,0	3,44
f_1	2	1,5	1,2	0,5	-0,1	-0,2	-0,1	0,5	1,3	1,45

Результаты вычислений для гипотетической ракеты, проведенных по аналитической зависимости (18), представлены на рисунке.



Зависимость угла скольжения от времени (сплошная линия — для жесткой ракеты, пунктирная — для упругой ракеты)

Из рисунка видно, что значение угла скольжения для упругой ракеты в 1,2—1,25 раза больше, чем для жесткой ракеты.

Выводы

Получены аналитические зависимости изменения угла скольжения (18), угла вектора скорости (21), угла продольной оси ракеты с учетом упругих колебаний (22). Для гипотетической ракеты значение угла скольжения для упругой ракеты в 1,2—1,25 раза больше, чем для жесткой. Представленные в статье материалы используются при проектировании и конструировании ракет, при анализе экспериментальных работ.

Библиографический список

1. Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. — М.: Машиностроение, 1969. — 300 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы: Пер. с англ. — 5-е изд. — М.: Наука, 1984. — 832 с.
3. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащих жидкость. — М.: Машиностроение, 1971. — 564 с.
4. Рабинович Б.И. Прикладные задачи устойчивости стабилизированных объектов. — М.: Машиностроение, 1978. — 232 с.
5. Черемных С.В. Стабилизируемость космических летательных аппаратов. Новые задачи и методы. — М.: Машиностроение, 1978. — 208 с.
6. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1990. — 176 с.

ANALYTICAL DETERMINATION OF MISSILE ANGLE POSITION TAKING INTO ACCOUNT THE FLEXIBLE OSCILLATIONS

Комиссаренко А.И.

Instrument Design Bureau named after academician A. Shipunov,
KBP, 59, Shcheglovskaya Zaseka str., Tula, 300001, Russia
e-mail: kbkedr@tula.net

Abstract

Sometimes interaction of elastic transverse vibrations of the body with an incoming air flow is referred to as aeroelastic vibrations. The frequency of these vibrations typically is close to the body proper vibrations. The vibrations induce unwanted transverse inertial loads on the body, particularly when they reach high amplitudes.

In the case when the missile is represented as a perfectly solid bit or when it has a rigid body, only the

small perturbations of the motion parameters are considered. It allows to obtain with regard to perturbations a linear system of differential equations with coefficients that depend on parameters of the unperturbed motion.

Small thrust vectors induced by transverse vibrations of the body with accurate within the second order of smallness result in no variations of the missile acceleration in longitudinal direction. This acceleration

remains the same one as for the nonperturbed motion, both in value and in direction. This is the reason why under the small perturbations the transverse motion can be considered regardless of the longitudinal motion. Within a short period of time the guided missile trajectory can be considered as a plain curve, which is little different from a straight line. Therefore, let us consider the nonperturbed motion of the missile within a short period of time as the straight-line motion.

The issues of influence of flexible oscillations on flying ballistic and strength characteristics are arising during the process of designing missiles with bigger lengthening. Flexible oscillations occur from the engine tractive force and aerodynamical forces.

In this article the missile is substituted for inhomogeneous pivot for the purpose of studying the flexible oscillations.

Consideration of missile as inhomogeneous pivot significantly simplifies the study of angle characteristics determination.

The differential equations of the missile motion with regard for flexible oscillation have been derived.

The differential equations of the missile motion include torque and forces of the generalized coordinates of transverse vibrations are first sounded.

In the presented work such characteristics as a tractive, ballistic, weight, aerodynamical and inertial one are substituted for average ones during missile operation. First tone flexible oscillations are taken into account.

Analytical dependencies of slip angle change, speed vector change, missile longitudinal axis angle with regard for the flexible oscillations have been obtained.

Keywords: flexible oscillations, first tone proper oscillations.

References

1. Kolesnikov K.S. *Zhidkostnaya raketa kak ob"ekt regulirovaniya* (Liquid rocket as object of regulation), Moscow, Mashinostroenie, 1969, 300 p.
2. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Opredeleniya, teoremy, formuly* (Reference book on mathematics for scientists and engineers. Definitions, theorems, formulas), Moscow, Nauka, 1984, 832 p.
3. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tonkostennykh konstruktssii s otsekami, sodержashchikh zhidkost'* (Dynamics of the thin-walled designs with compartments containing liquid), Moscow, Mashinostroenie, 1971, 564 p.
4. Rabinovich B.I. *Prikladnye zadachi ustoichivosti stabilizirovannykh ob"ektov* (Applied problems of stability of the stabilized objects), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 232 p.
5. Cheremnykh S.V. *Stabiliziruemost' kosmicheskikh letatel'nykh apparatov. Novye zadachi i metody* (Stability of space aircraft. New tasks and methods), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 208 p.
6. Chetaev N.G. *Ustoichivost' dvizheniya* (Stability of the movement), Moscow, Nauka, 1990, 176 p.