

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 521.11

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РОСТА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Воронцова В.Л.

*Институт управления, экономики и финансов
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Бутлерова, 4, Казань, 420012, Россия
e-mail: VLVorontsova@yandex.ru*

Изучение влияния аэродинамики на движение искусственного спутника-связки двух тел обусловлено расширением области применения космической техники на орбитальные тросовые системы большой протяженности. Для таких больших космических систем аэродинамические эффекты весьма существенны. В работе исследовано поведение предельного цикла для уравнения относительного движения орбитальной связки двух тел с учетом влияния гравитационного эффекта, аэродинамического давления, аэроградиентного и диссипативного факторов в зависимости от роста аэродинамического параметра a . Используются уравнения связанного движения с учетом сил гравитационного градиента и аэродинамических факторов. Исследовано влияние аэродинамического параметра на поведение предельных циклов. Для исследования применены известные методы нелинейной механики: метод уравнений Лагранжа первого рода, метод фазовой плоскости, метод точечных отображений, методы теории устойчивости движения.

Ключевые слова: динамика космических систем, качественная теория динамических систем, орбитальная связка тел, тросовые системы, предельные циклы, фазовое пространство, аэродинамический параметр, эксцентриситет орбиты.

Введение

Идеи использования системы тел, соединенных длинными связями — тросами, в космическом пространстве восходят к работам К.Э. Циолковского. Тросовые системы, которые могут создаваться на орбите из отдельных тел, связанных между собой и отстоящих друг от друга на расстояния от не-

скольких метров до десятков и сотен километров, занимают в космической технике особое место.

Тросовые системы периодически использовались с начала освоения космического пространства. В частности, в 1966 году был использован трос (фал) для соединения космонавта А.А. Леонова с кораблем «Восход-2». В том же году во время по-

лета пилотируемых спутников Gemini 11 и Gemini 12 было осуществлено экспериментальное исследование возможности создания тросовой системы, образованной спутником и последней ступенью ракеты-носителя Agena, соединенными дакроновым тросом длиной 30,48 м [1].

Существенный интерес к созданию космических тросовых систем (КТС) [2] появился в середине 70-х годов XX века в связи с предложением G. Colombo, M.D. Grossi (Смитсоновская астрофизическая лаборатория, США) использования зонда на тросе протяженностью 100 км для исследования параметров полей Земли и ее атмосферы на низких высотах. Подписанное соглашение между NASA и Италией, NASA и Европейским космическим агентством по разработке этих предложений создало условия для успешного развития КТС. Новые возможности эффективного использования КТС сделали их развитие одним из перспективных направлений современного развития космонавтики. Новизна и своеобразие задач и методов исследования поведения КТС привлекли внимание специалистов. С начала 80-х годов происходит формирование области КТС в отдельную область исследования космического пространства.

Обзор современного уровня развития КТС и ряд результатов исследования математических моделей движения КТС представлены в [10–21]. За последние 25 лет теория КТС накопила богатый материал, основанный на интенсивных исследованиях [3–5] и серии научных экспериментов [6].

В [7] рассмотрены возможности применения вращающихся космических тросовых систем. Канадский проект VICEPS [6] и поддержка его NASA [9] представляются значительным шагом в развитии направления использования вращающихся КТС.

Оценка влияния аэродинамических эффектов на вращение и положение искусственных спутников проводилась в течение нескольких десятилетий и до сих пор является актуальной задачей. Эти исследования представлены, например, в монографиях [12–14], а также в многочисленных журнальных публикациях. Новый интерес к этой области возник в связи с проектированием крупномасштабных тросовых систем, в котором эффект аэроградиента является существенным [14].

В данной работе проведено исследование предельного цикла для уравнения относительного движения жесткой орбитальной связки двух тел с учетом влияния гравитационного эффекта, аэродинамического давления, аэроградиентного и диссипативного факторов, в зависимости от роста эксцентриситета e и аэродинамического параметра a .

С помощью численной реализации метода точечных отображений Пуанкаре построены фазовые портреты задачи с регулярными и хаотическими движениями и прослежена эволюция этих фазовых портретов с изменением параметров.

Уравнение движения орбитальной связки двух тел с учетом аэроградиентного и диссипативного факторов

Рассматривается орбитальная связка тел — две материальные точки с массами m_1 и m_2 , соединенные жестким безмассовым стержнем (жесткая гантель), под действием гравитационных и аэродинамических сил, приложенных к точкам m_1 и m_2 . Предполагается, что центр масс системы движется по кеплеровой эллиптической орбите.

На рис. 1 представлена орбитальная связка тел с обозначениями величин, которые входят в уравнение движения.

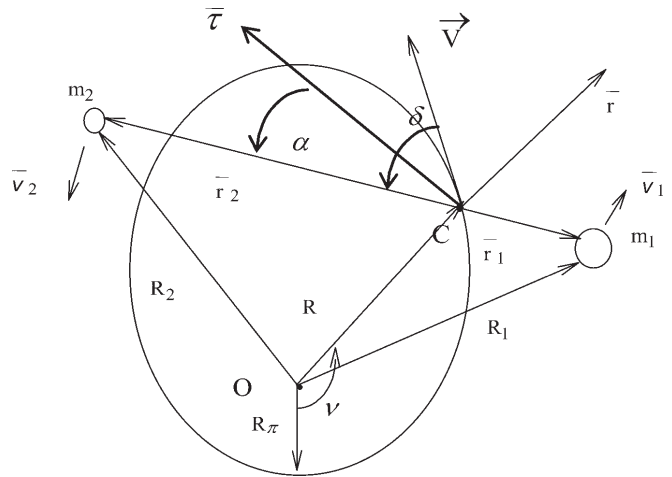


Рис. 1. Орбитальная связка тел с обозначениями, используемыми в уравнении движения

Используются следующие обозначения: O — центр притяжения (центр Земли); C — центр масс гантели, который по постановке движется по кеплеровой эллиптической орбите; $C\bar{r}\bar{\tau}$ — орбитальная система координат, в которой \bar{r} — единичный вектор по направлению текущего радиус-вектора орбиты, $\bar{\tau}$ — единичный вектор по направлению трансверсали, в сторону движения по орбите; R — текущее расстояние от центра притяжения O до центра масс гантели C ; R_{π} — минимальное (перигейное) значение этого расстояния; v — истинная аномалия (угол между перигейным и текущим радиус-векторами центра масс C гантели); \vec{V} — текущий вектор скорости центра масс C гантели; m_i , $i = 1, 2$, — точечные массы на концах гантели;

\vec{r}_i , $i = 1, 2$, — векторы из центра масс C гантели в ее концы; $l_i = |\vec{r}_i|$, $i = 1, 2$; $l = l_1 + l_2$ — длина гантели; $l_i = l \frac{m - m_i}{m_1 + m_2}$, $i = 1, 2$, $m = m_1 + m_2$; R_i , $i = 1, 2$, — расстояние от центра притяжения O до массы m_i ; $\vec{\Omega}$ — абсолютная угловая скорость гантели ($\Omega = \dot{v} + \dot{\alpha}$); $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ — текущая угловая скорость центра масс C гантели; α — угол, отсчитываемый от трансверсали $\vec{\tau}$ до направления \vec{r}_2 в сторону направления орбитального движения, $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$.

Угол δ представляет собой угол, отсчитываемый от вектора скорости \vec{V} центра масс C гантели до вектора \vec{r}_2 , проведенного из C в m_2 .

Уравнение движения с учетом гравитационного воздействия, аэродинамического давления, аэроградиентного и диссипативного факторов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\alpha}{dv^2} - \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} \left(1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) - \frac{n^2}{1 + e \cos v} \sin \alpha \cos \alpha - \\ & - a \frac{\bar{\sigma}(v)}{(1 + e \cos v)^4} (1 + e^2 + 2e \cos v) \sin \delta - \\ & - k \frac{\bar{\sigma}(v)(1 + e^2 + 2e \cos v)}{(1 + e \cos v)^4} \sin \delta \sin \alpha + \\ & + b \frac{\bar{\sigma}(v) \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2} (1 + \sin^2 \delta) \left(1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$n^2 = 3; \quad a = \frac{\rho_\pi P^2}{l} \frac{c_2 m_1 - c_1 m_2}{m_1 m_2}; \quad (2)$$

$$k = \frac{\rho_\pi P^2}{H} \frac{c_2 m_1^2 + c_1 m_2^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}; \quad (2)$$

$$b = \rho_\pi P \frac{c_2 m_1^2 + c_1 m_2^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}; \quad P = R_\pi (1 + e); \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}(v) = \exp \left\{ -\kappa \frac{1 - \cos v}{1 + e \cos v} \right\}; \quad \kappa = \frac{R_\pi}{H} e; \quad (4)$$

$$\sin \delta = \frac{(1 + e \cos v) \sin \alpha + e \sin v \cos \alpha}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}. \quad (5)$$

Члены с параметрами n , a , k , b описывают следующие физические воздействия: n ($n^2 = 3$) — гравитационные воздействия; a — аэродинамическое давление; k — аэроградиентный эффект за счет градиента плотности атмосферы вдоль гантели; b — аэродинамическое трение (аэродинамическая диссипация).

В уравнении (1) независимой переменной является истинная аномалия v (угол между перигейным и текущим радиус-векторами центра масс C гантели). В уравнении независимая переменная «время» заменена на независимую переменную «истинная аномалия».

В работе [18] дан вывод уравнения движения для круговой орбиты, а в работе [19] — вывод уравнения движения (1)—(5) с учетом аэроградиентного и диссипативного факторов для эллиптической орбиты.

В работе [20] уравнения (1)—(5) рассмотрены с учетом гравитационного фактора и аэродинамического давления.

В случае $e \neq 0$ (эксцентриситет отличен от нуля) влияние градиента плотности вдоль орбиты является существенным. Это влияние характеризуется функцией $\bar{\sigma}(v)$ и определяется величиной параметра κ .

Так как $\frac{R_\pi}{H} \approx 100$, то даже при малом $e \sim 0,01$

имеем $\kappa \sim 1$, и $\bar{\sigma}(v)$ вдоль орбиты меняется на порядок. Это означает, что даже при очень малых эксцентриситетах орбиты аэродинамические члены могут существенно повлиять на движение, включая его хаотизацию.

Так же, как и в [21], можно воспользоваться истинной аномалией v (угол между перигейным и текущим радиус-векторами центра масс C гантели) в качестве независимой переменной в уравнении (1).

Анализ модели и результаты компьютерного моделирования

Для перехода от фазовой траектории к точечному отображению применяется метод точечных отображений Пуанкаре. На фазовую плоскость (α, α') выводились результаты численного интегрирования уравнения движения только при значениях независимой переменной $v = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Независимой переменной является истинная аномалия v (угол между перигейным и текущим радиус-векторами центра масс C гантели).

При такой интерпретации периодическому движению на фазовой плоскости отвечает одна един-

ственная точка (2π -периодическое движение), или две точки (4π -периодическое движение), или, вообще говоря, k точек ($2\pi k$ -периодическое движение, где k — целое число). При этом точки, отвечающие устойчивым периодическим движениям, окружены цепочкой точек, отвечающих условно-периодическим движениям, а в окрестности неустойчивых периодических движений рождается беспорядочное множество точек, образующих «слои» хаотического движения. При некоторых условиях эти слои порождают «хаотическое море», в котором взвешены «острова» и «архипелаги» регулярных (периодических и условно-периодических) движений.

Сочетание аэроградиентной раскрутки связки с ее торможением аэродинамическим трением приводит в пределе либо к относительным равновесиям, либо к предельным циклам второго рода (делается предположение, что угловая скорость вдоль цикла постоянна). С помощью численной реализации метода точечных отображений выявлены предельные циклы второго рода, соответствующие вращению связки с большой, но конечной угловой скоростью.

Классификация предельных циклов цилиндрического фазового пространства исходя из известного в топологии деления на классы гомотопных путей на данном многообразии дана в [22]. Более удобной для практического использования, в частности для компьютерного моделирования, является классификация периодических решений, предложенная в [23].

В [24] разработаны методы построения предельных циклов первого и второго рода и круговых движений в многомерных фазовых системах, получены необходимые и достаточные условия существования периодических решений и предложен метод их построения путем минимизации последо-

вательностей. Проблема предельных циклов сведена к решению краевой задачи оптимального управления специального вида.

В работах [25, 26] было начато исследование предельных циклов в случае эллиптической орбиты с учетом влияния всех параметров: гравитационного градиента (n^2), аэродинамического давления (a), градиента плотности вдоль гантели (k), аэродинамической диссипации (b). Количественные и качественные характеристики решений уравнения (1)—(5) зависят от абсолютных значений безразмерных параметров аэродинамического давления a , аэродинамического градиента k , аэродинамического трения b , а также от относительного значения этих параметров по отношению друг к другу и к числу 3, которое характеризует влияние гравитационного градиента на спутник-гантель.

Влияние эллиптичности орбиты определяется значением ее эксцентриситета e и в значительной мере значением параметра $\varkappa = \frac{R}{H} e$, который определяется аэродинамическими членами уравнения (1). Параметр \varkappa на два порядка больше, чем эксцентриситет орбиты e . Это означает, что даже при малых эксцентриситетах орбиты аэродинамические члены могут существенно влиять на движение, включая его хаотизацию.

В данной статье выявлено, что при низкой эллиптичности орбиты $e = 0,001$ предельный цикл существует. Предельный цикл возникает при $a = 4$ и исчезает при $a = 46$. Примеры циклов приведены на рис. 2—4. На представленных рисунках по оси абсцисс отложены значения α , а по оси ординат — значения α' .

При малом значении аэродинамического параметра a предельных циклов нет. Предельный цикл возникает при $a = 4$ в окрестности $\alpha' \approx 29,6$. По результатам составлена таблица расположения пре-

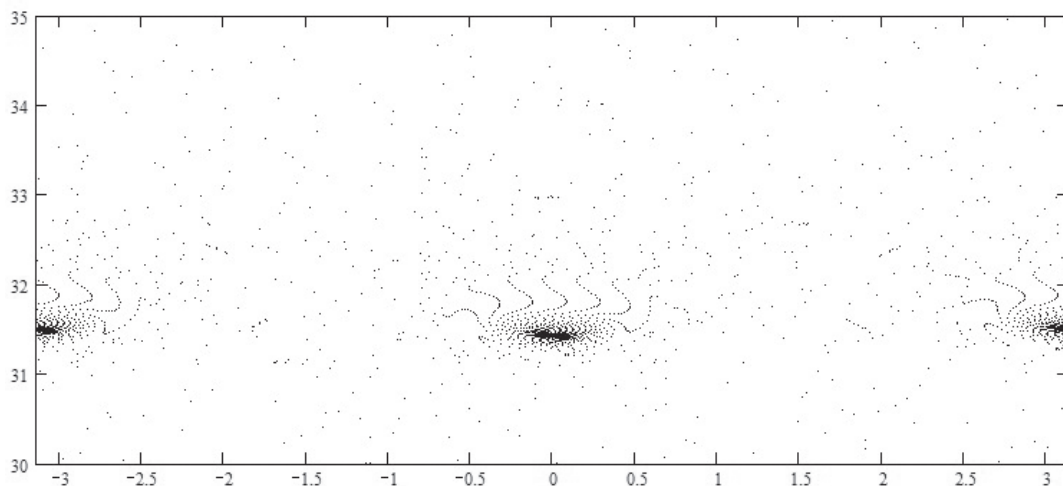


Рис. 2. Предельный цикл отсутствует при значениях параметров: $a = 1$; $b = 0,001$; $k = 0,1$; $e = 0,001$

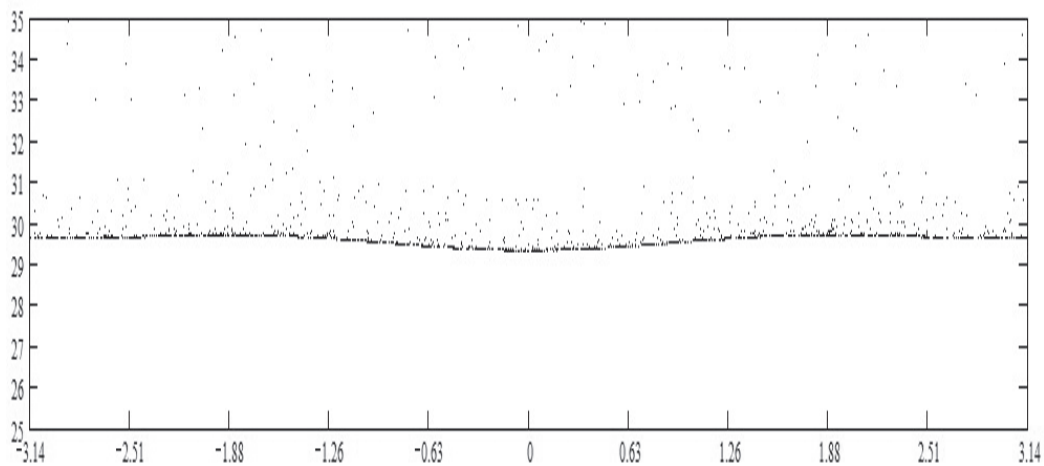


Рис. 3. Предельный цикл возникает при значениях параметров: $a = 4$; $b = 0,001$; $k = 0,1$; $e = 0,001$

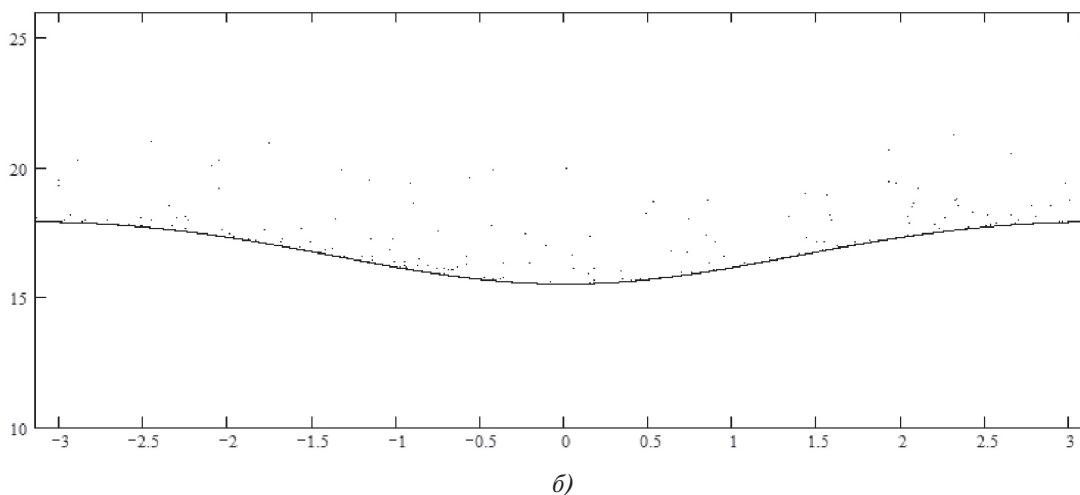
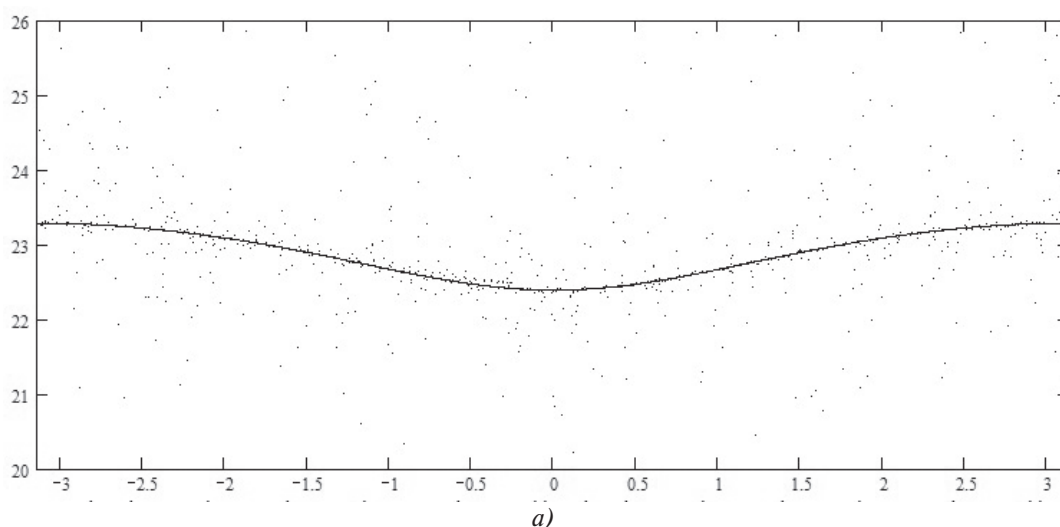


Рис. 4 (начало)

дельного цикла в зависимости от параметра a . Значения параметров k и b одинаковы ($k = 0,1$; $b = 0,001$), параметр a меняется. Из таблицы видно, что при возрастании параметра a предельный цикл снижается.

По результатам исследований, приведенным в данной статье, а также в [25, 26], можно сделать вывод, что при малом эксцентриситете орбиты и одинаковых значениях параметров k и b расположение предельного цикла зависит от значения аэродина-

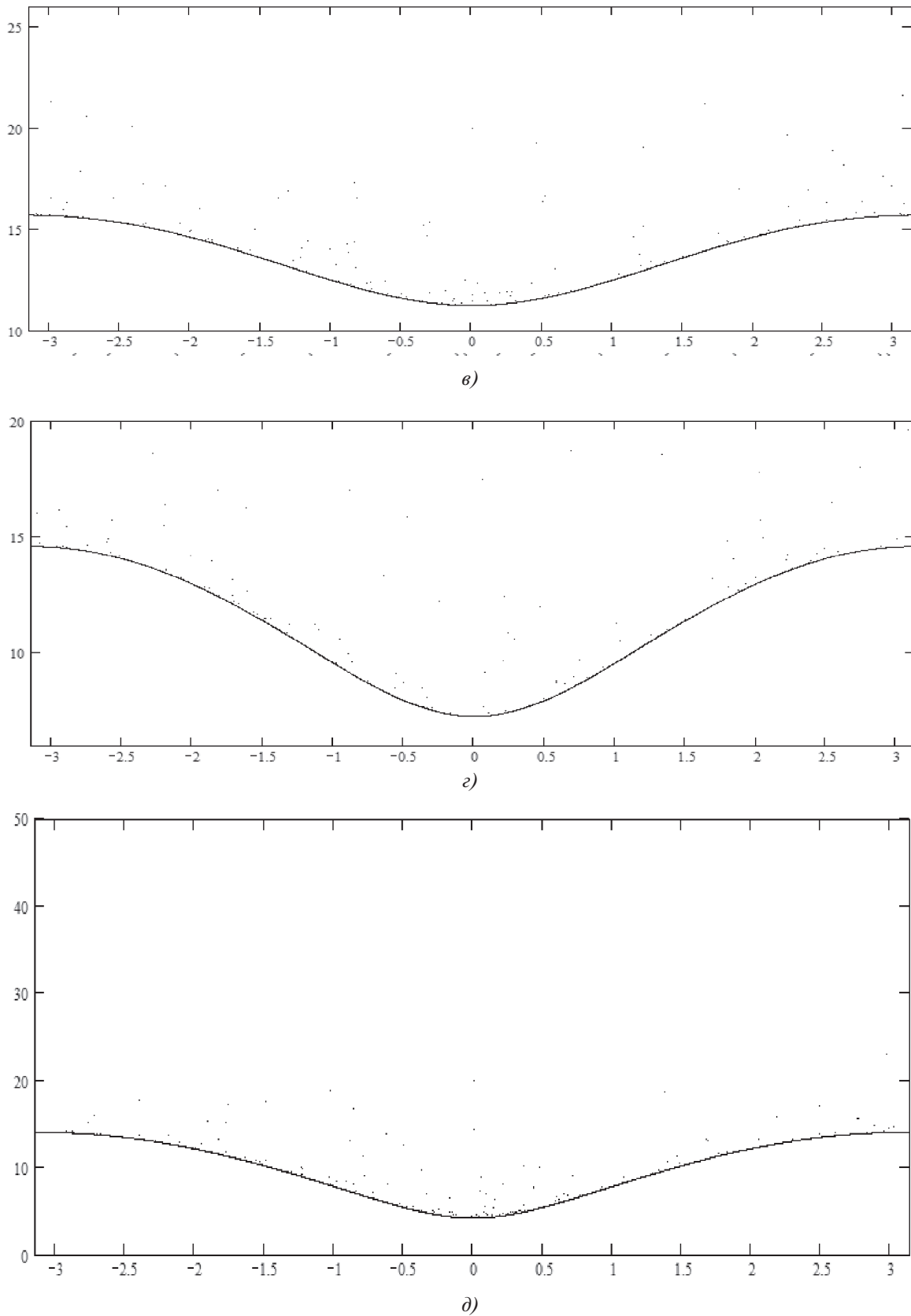


Рис. 4 (окончание). Эволюция предельного цикла при $b = 0,01$; $k = 0,1$; $e = 0,01$ и следующих значениях a :
 рис. 4,а: $a = 10$; рис. 4,б: $a = 20$; рис. 4,в: $a = 30$; рис. 4,г: $a = 40$; рис. 4,д: $a = 45$

a	4	6	8	10	20	30	40	45
α'	29,6	27,32	25,14	23,25	17,9	15,8	14,6	14,05

мического параметра a . Чем больше значение параметра a , тем меньше становится значение угловой скорости α' и тем ниже располагается предельный цикл (α — угол, отсчитываемый от трансверсали $\vec{\tau}$ до направления \vec{r}_2 в сторону направления орбитального движения).

Выводы

Основной качественный эффект во вращательном движении спутника на эллиптической орбите — возможность хаотизации движения [15—17]. Атмосфера особенно сильно затрагивает начало хаотизации из-за экспоненциального изменения ее плотности на эллиптической орбите. Даже относительно небольшие эксцентриситеты могут допускать сильную хаотизацию.

При значениях эксцентриситета $e = 0,001$ и малых значениях аэродинамического параметра a предельных циклов нет, рост аэродинамического параметра a приводит к появлению предельных циклов. При значениях параметра a от 4 до 45 предельный цикл существует. При этом значение α' , к которому «скатываются» все точки на фазовом портрете, снижается от 29,6 до 14,5. При дальнейшем возрастании параметра a ($a > 45$) предельные циклы исчезают.

Оценка коэффициентов аэроградиента и аэродинамического трения показывает, что их отношения не зависят ни от размера спутника-гантели, ни от его динамических характеристик, а зависят только от параметров орбиты и высоты атмосферы:

$$\frac{b}{k} = \frac{H}{R_{\pi}(1+e)}.$$

Если $C_2 m_2 \gg C_1 m_1$, то относительное влияние аэродинамических коэффициентов может быть оценено отношениями

$$\frac{k}{a} \sim \frac{l}{H}, \quad \frac{b}{a} \sim \frac{l}{R_{\pi}(1+e)},$$

которые не зависят от динамических характеристик спутника-гантели, а зависят только от параметров орбиты, высоты атмосферы и длины гантели. Таким образом, меняя параметры орбиты, высоту атмосферы и длину гантели, можно влиять на движение спутника-гантели, включая его хаотизацию.

Библиографический список

1. Lang D.D., Noling R.R. Operations with tethered space vehicles. NASA SP, Houston, Texas, 1967, 66 p.
2. Steiner W., Steindl A., Troger H. Dynamics of a space satellite system with two rigid endbodies. Fourth

- International Conference on tether in Space. Washington. 1995, pp.133-148.
3. Bourov A., Troger H. On relative equilibria of tethered gyrostat in a central Newtonian field // Journal Mathematics and Mechanics. 1997. №77, pp. 53-54.
4. Crellin B., Janssens F., Poelaert D., Steiner W., Troger H. On balance, variational formulations of the equations of motion of a body deploying along a cable // Journal of Applied Mechanics. 1997. Vol. 64. №6. pp. 359-374.
5. Krupa M., Schagerl M., Steindl A., Troger H. Relative equilibria of tethered satellite systems and their stability // Journal Mathematics and Mechanics. 1996. №76, pp. 329-332.
6. Steiner W., Steindl A., Troger H. Center manifold approach to the control of a tethered satellite system // Applied Mathematics and Computation. 1995. №70. pp. 315-327.
7. Games H.G., Yau A.W., Tyc G. Space research in the bicept experiment. Fourth International Conference on tether in Space. Washington. 1995, pp.124-127.
8. Alpatov A.P., Dranovskiy V.I., Khoroshilov V.S., Pirozhenko A.V., Zakrzhevskii A.E. Resarch of dynamics of space cable systems stabilized by rotation // In Book of abstracts. 48-th International Astronautic Congress, Turin, 1997, pp. 13.
9. Tyc G., Rup C.C., Jablonski A.M., Vignerone F.R. A shuttle deployed tether technology demonstration mission to serve canadian and united states needs.// Fourth International Conference on tether in Space, Washington, 1995, pp. 178-180.
10. Алпатов А.П., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Хорошилов В.С. Космические тросовые системы. Обзор проблемы // Космическая наука и технология. 1997. Т. 3. № 5/6. С. 12-22.
11. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
12. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. — М.: Наука, 1977. — 432 с.
13. Белецкий В.В., Янишин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. — Киев: Наукова думка, 1984. — 187 с.
14. Wisdom J., Peale S.J., Mignard F. The chaotic rotation of Hyperion // Icarus, 1984. Vol. 58. № 2. P. 137-152.
15. Wisdom J. Rotational dynamics of irregularly shaped natural satellites // Astronomical Journal, 1987. Vol. 94. № 5. pp. 1350-1360.
16. Beletsky V.V., Pivovarov M.I., Starostin E.L. Regular and chaotic motion in applied dynamics of a rigid body // Chaos. 1996. Vol. 6. № 2. pp. 155-166.
17. Белецкий В.В., Воронцова В.Л. Влияние градиента плотности атмосферы на вращение и ориентацию гантелеобразного спутника // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. 2000. № 5. С. 35-39.
18. Белецкий В.В., Пивоваров М.И. О влиянии атмосферы на относительное движение гантелеобразного спутника // Прикладная математика и механика. 2000. № 4. С. 691-700.

19. Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Зажжевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2007. — 557 с.
20. Буров А.А., Косенко И.И. О плоских колебаниях тела с переменным распределением масс на эллиптической орбите // Доклады Академии наук. 2011. Т. 440. № 6. С. 1-5.
21. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969. — 300 с.
22. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. — М.: Гостехиздат, 1954. — 250 с.
23. Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А., Иманкул Т.Ш. Предельные циклы в динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством // Математический журнал. 2011. Т. 11. № 3-4. С. 14-24.
24. Воронцова В.Л. Об исследовании поведения предельных циклов в зависимости от возрастания эксцентриситета // Вестник СГУ. 2011. № 77(1). С. 304-306.
25. Воронцова В.Л. Об анализе поведения предельных циклов при росте эксцентриситета орбиты и аэродинамического параметра // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 1. С. 255-258.

ON INVESTIGATION OF LIMIT CYCLES BEHAVIOR DEPENDING ON THE GROWTH OF AERODYNAMIC PARAMETER OF ORBITAL ROPE SYSTEM MOTION IN AN ELLIPTICAL ORBIT

Vorontsova V.L.

*Institute of Management, Economics and Finance Kazan Federal University,
KFU, 4, Butlerova str., Kazan, 420012, Russia
e-mail: VLVorontsova@yandex.ru*

Abstract

The study of aerodynamics influence on the motion of an artificial cluster-satellite of two bodies is stipulated by the expansion of large extent orbital tether systems field of application. For such large space systems, aerodynamic effects are of a great significance. We have investigated the behavior of limit cycle for an equation of relative motion orbital cluster of two bodies considering impact of gravitational effect, aerodynamic pressure, airborne gradient and dissipative factors, depending on the growth of aerodynamic parameter a . We use the equations of interconnected motion with allowance for the forces of gravitational gradient and aerodynamic factors. We study the effect of aerodynamic parameters on the behavior of limit cycles. To carry out the research we implemented well-known methods of nonlinear mechanics: of Lagrange equations of the first kind method, phase plane method; points mapping method; theory of motion stability methods.

The main qualitative effect of the rotational motion of the satellite in an elliptical orbit is the possibility motion chaotization. The atmosphere creates especially strongly effects the beginning of chaotization due to the exponential change of its density in an elliptical orbit. Even relatively small eccentricities can enable strong chaotization.

For eccentricity values $e = 0.001$ and small values of the aerodynamic parameter a limit cycles are absent. The increase of aerodynamic parameter a leads to the emergence of limit cycles. For values of a from 4 to 45 there a limit cycle exists. The value of ω to which all points on the phase portrait “roll down” drops from 29.6 to 14.5. With a further increase of the parameter a ($a > 45$) limit cycles disappear.

Keywords: dynamics of space systems, qualitative theory of dynamical systems, orbital cluster of bodies, tether systems, limit cycles, phase space, aerodynamic parameter, orbit eccentricity.

References

1. Lang D.D., Nolting R.R. Operations with tethered space vehicles. *NASA Special Publications*, Houston, Texas, 1967, pp. 55-66.
2. Steiner W., Steindl A., Troger H. Dynamics of a space satellite system with two rigid end bodies. *Fourth International Conference on tether in Space*, Washington, 1995, pp. 133-148.
3. Bourov A., Troger H. On relative equilibria of tethered gyostat in a central Newtonian field. *Journal Mathematics and Mechanics*. 1997, vol. 77, pp. 53-54.

4. Crellin B., Janssens F., Poelaert D., Steiner W., Troger H. On balance, variational formulations of the equations of motion of a body deploying along a cable. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, vol. 64, no. 6, pp. 359-374.
5. Krupa M., Schagerl M., Steindl A., Troger H. Relative equilibria of tethered satellite systems and their stability. *Journal Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 76, pp. 329-332.
6. Steiner W., Steindl A., Troger H. Center manifold approach to the control of a tethered satellite system. *Applied Mathematics and Computation*, 1995, vol. 70, pp. 315-327.
7. Games H.G., Yau A.W., Tyc G. Space research in the bicept experiment. *Fourth International Conference on tether in Space*, Washington, 1995, pp. 124-127.
8. Alpatov A.P., Dranovskiy V.I., Khoroshilov V.S., Pirozhenko A.V., Zakrzhevskii A.E. Resarch of dynamics of space cable systems stabilized by rotation. *In Book of abstracts. 48-th International Astronautic Congress*, Turin, 1997, pp.13.
9. Tyc G., Rup C.C., Jablonski A.M., Vigneron F.R. A shuttle deployed tether technology demonstration mission to serve canadian and united states needs. *Fourth International Conference on tether in Space*, Washington, 1995, pp.178-180.
10. Alpatov A.P., Dranovskii V.I., Zakrzhevskii A.E., Pirozhenko A.V., Khoroshilov V.S. *Kosmicheskaya nauka i tekhnologiya*, 1997, vol. 3, no. 5/6, pp. 12-22.
11. Beletskii V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otositel'no tsentra mass* (Artificial satellite motion relative to the center of mass), Moscow, Nauka, 1965, 416 p.
12. Beletskii V.V. *Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel* (Essays about cosmic bodies motion). Moscow, Nauka, 1977, 432 p.
13. Beletskii V.V., Yanshin A.M. *Vliyanie aerodinamicheskikh sil na vrashchatel'noe dvizhenie iskusstvennykh sputnikov* (The influence of aerodynamic forces on the rotational motion of artificial satellites). Kiev, Naukova dumka, 1984, 187 p.
14. Wisdom J., Peale S.J., Mignard F. The chaotic rotation of Hyperion. *Icarus*, 1984, vol. 58, no. 2, pp. 137-152.
15. Wisdom J. Rotational dynamics of irregularly shaped natural satellites. *Astronomical Journal*, 1987, vol. 94, no. 5, pp. 1350-1360.
16. Beletskii V.V., Pivovarov M.I., Starostin E.L. Regular and chaotic motion in applied dynamics of a rigid body. *Chaos*, 1996, vol. 6, no. 2, pp. 155-166.
17. Beletskii V.V., Vorontsova V.L. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika*, 2000, no. 5, pp. 35-39.
18. Beletskii V.V., Pivovarov M.L. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2000, no. 4, pp. 691-700.
19. Alpatov A.P., Beletskii V.V., Dranovskii V.I., Zakrzhevskii A.E., Pirozhenko A.V., Troger G., Khoroshilov V.S. *Dinamika kosmicheskikh sistem s trosovymi i sharnirnymi soedineniyami* (Dynamics of space systems with tethers and joints), Moscow - Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", Institut komp'uternykh issledovaniy, 2007, 557 p.
20. Burov A.A., Kosenko I.I. *Doklady Akademii Nauk*, 2011, vol. 440, no. 6, pp. 1-5.
21. Barbashin E.A., Tabueva V.A. *Dinamicheskie sistemy s tsilindricheskim fazovym prostranstvom* (Dynamical systems in a cylindrical phase space), Moscow, Nauka, 1969, 300 p.
22. Pontryagin L.S. *Nepreryvnye gruppy* (Continuous groups), Moscow, Gostehizdat, 1954, 250 p.
23. Aisagaliev S.A., Aipanov Sh.A., Imankul T.Sh. *Matematicheskii zhurnal*, 2011, vol. 11, no. 3-4, pp. 14-24.
24. Vorontsova V.L. *Vestnik SGU*, 2011, no. 77(1), pp. 304-306.
25. Vorontsova V.L. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 255-258.