

## ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В СИСТЕМЕ «АКСИАЛЬНО НАМАГНИЧЕННЫЙ ТОР—МАГНИТОМЯГКИЙ ШАР»

Андреев А.К.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: alexande\_andreev@yahoo.com*

Численно исследовано поле аксиально намагниченного тора в окрестности его оси симметрии. Показано, что профиль поля позволяет построить простую математическую модель для определения пондеромоторных сил в системе «тор—шар» вдоль оси  $Z$ . Модель предполагает расчёт поляризации шара в поле тора с «усреднением» поверхностных «магнитных зарядов» по двум полусферам и определение сил, действующих на эффективные «магнитные заряды» полусфер. Исследованы положения шара вдоль оси  $Z$  в зависимости от внешних сил. Рассчитаны диапазоны устойчивого равновесия шара для областей над- и под тором. Результаты расчётов согласуются с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* магнитная левитация, намагниченность, аксиально намагниченный тор, пондеромоторные силы, магнитомягкий шар, магнитоэлектрический потенциал, «магнитные заряды», размагничивающий фактор.

### Введение

Феномен неконтактного подвеса различных тел в электрических и/или магнитных полях формулируется как «левитация». При этом пондеромоторные силы, действующие на тело, компенсируют силы гравитации. Большое внимание уделяется проблемам левитации диамагнитных и сверхпроводящих тел в статических магнитных полях [1, 2]. Такие тела обладают отрицательной магнитной восприимчивостью, и бесконтактное положение их в магнитном поле устойчиво.

Согласно теореме Ирншоу [3] считается, что устойчивая статическая конфигурация электрических зарядов, взаимодействующих по закону Кулона, невозможна. Теорема Ирншоу справедлива и для магнитных систем.

Основные понятия левитации популярно изложены в статье А. Гейма [4]. В работах [5, 6] приведено теоретическое обоснование известных экспериментов по левитации диамагнетиков в статических магнитных полях.

Проблемам левитации проводящих тел в статических электрических и магнитных полях посвящена монография [7]. Вопросы, связанные с электромагнитным подвесом, подробно рассмотрены в обзорной статье [8].

Эффект левитации используется для создания ньютометров, градиентометров, гравиметров и

других устройств с бесконтактным подвесом. Сверхточные бесконтактные гироскопы и гирокомпасы с левитирующим маховиком широко используются в системах ориентации и управления летательных аппаратов. Важным приложением рассматриваемого эффекта является симулирование состояния невесомости, которое проявляется на уровне атомов и молекул образца. Токовые системы — аналоги тора позволяют управлять потоками плазмы в каналах.

Разработанные в последнее время постоянные магниты на основе SmCo с рабочей температурой свыше  $600^{\circ}\text{C}$  представляют интерес для специальных применений.

Одна из задач магнитной левитации связана с определением пондеромоторных сил в системе «аксиально намагниченный тор — неподвижный магнитомягкий образец». В качестве образца обычно рассматривается шар с замороженными вращательными степенями свободы. Шар, центрированный на оси тора, находится в положении неустойчивого равновесия в радиальном направлении, и для его стабилизации радиальная степень свободы также должна быть устранена.

В такой системе имеется три локальных минимума потенциальной энергии на оси симметрии тора  $Z$ : в плоскости симметрии тора  $Z=0$ , над тором и под ним. Силы, стабилизирующие положе-

ние шара в поле тора, определяются профилями полей вблизи локальных максимумов поля на оси симметрии тора. Шар при отсутствии внешней силы, например, в состоянии невесомости или при горизонтальном расположении системы «тор—шар», будем определять как «свободный», а при воздействии внешней силы  $f$  — как «нагруженный».

Задачи, связанные с левитацией, сводятся к расчёту положения равновесия шара в одномерной потенциальной яме конечной глубины, определяемой полем тора. Потенциал поля тора рассчитывается с использованием специальных функций [9]. Левитация шара и структура поля торов качественно рассмотрены в учебном фильме «Магнитные поля в герконах» [10]. Графики эквипотенциальных линий поля тора и токовые системы исследованы в [11].

Цель данной публикации: разработка математической модели расчёта сил в системе «тор—магнитомягкий шар»; расчёт диапазона устойчивого положения шара — диапазона левитации; численные расчёты характерных координат полей, положений шара, сил; смещений шара по отношению к этим координатам при воздействии внешних сил; определение области применимости модели.

По сведениям автора представляемой статьи, такие исследования, подтверждённые численными расчётами, ранее не публиковались.

### 1. Структура поля аксиально намагниченного тора

В данной работе расчёты выполнены для тора размером  $9,7 \times 4 \times 1,25$  см. Высота тора  $L = 1,25$  см.

Намагниченность тора принята  $M_z = 915$  ед/см<sup>3</sup>. Начало координат расположено в центре симметрии тора. Вычисления производились в гауссовой системе единиц, в которой напряжённость магнитного поля  $\mathbf{H}$ , магнитная индукция  $\mathbf{B}$  и намагниченность связаны соотношением:  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ . В этой системе поля рассеяния  $H$  и индукции  $B$  тора в свободном пространстве (вне ферромагнетика) совпадают:  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{H}$ . В тексте термины «поле» и «индукция» используются как синонимы. В расчётах, по мере целесообразности, используются как  $B$ , так и  $H$ . Модули напряжённости поля и индукции определяются как

$$H_{\text{mod}} = \sqrt{H_z^2 + H_r^2} \quad \text{и} \quad B_{\text{mod}} = \sqrt{B_z^2 + B_r^2}.$$

Индексы  $z$  и  $r$  относятся к  $z$ - и радиальной  $r$  компонентам поля и индукции. Для расчёта полей использовалась программа для ЭВМ — Mathcad 14 [12], определяющая потенциал поля через эллиптические интегралы. Графики поля тора приведены на рис. 1.

На рис. 1,а схематично показаны графики изменения полей  $H_z$  и  $H_{\text{mod}}$  вдоль оси  $Z$ : выделены три области  $A$ ,  $B$  и  $C$ , в которых существуют локальные максимумы поля  $H$  (в этих областях возможна одномерная левитация шара);  $z1$  и  $z2$  — координаты, в которых  $H_z$  и  $H_{\text{mod}}$  обращаются в ноль;  $z1_A$  и  $z1_B$  соответствуют координатам максимумов поля в областях  $A$  и  $B$ ; в области  $C$  максимум достигается при  $z = 0$ .

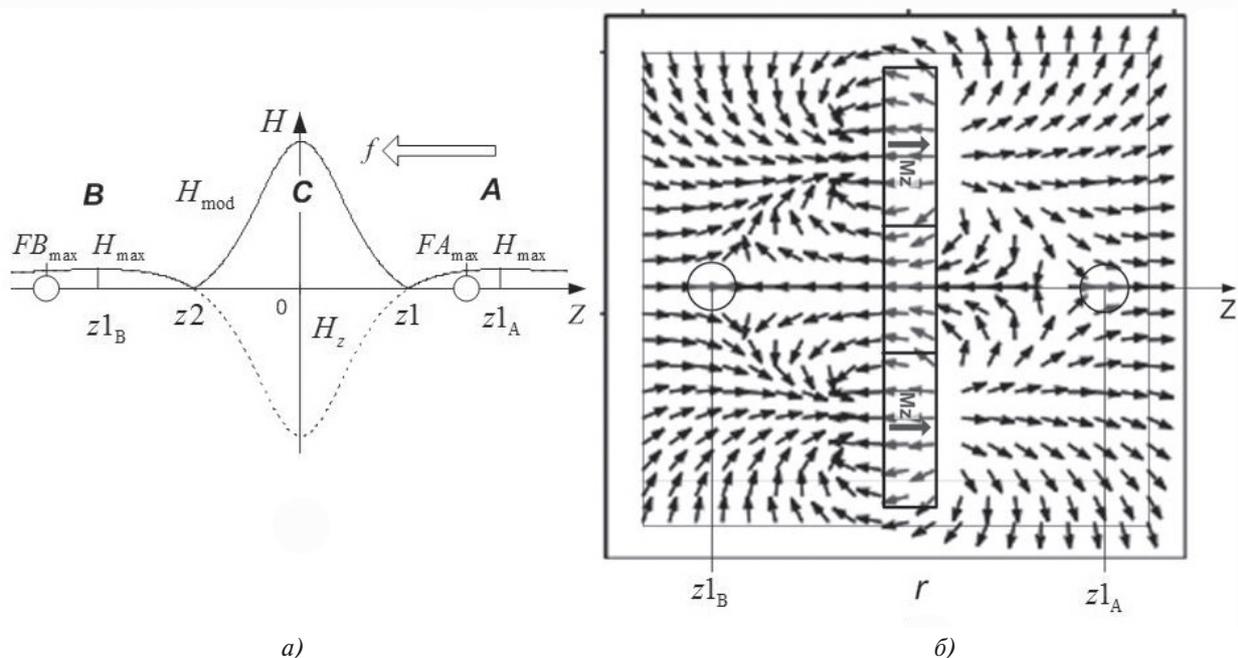


Рис. 1. Графики поля тора: а — схема профиля поля вдоль оси  $Z$ ; б — векторное поле тора в плоскости  $r-z$  ( $-6 \text{ см} \leq r \leq 6 \text{ см}$ ;  $-3,5 \text{ см} \leq z \leq 3,5 \text{ см}$ )

График векторного поля тора  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_z$  в нормализованном виде показан на рис. 1, б. Тор, намагниченный в направлении по оси  $Z$ , выделен в масштабе прямоугольником. Стрелки, расположенные в объёме тора, показывают направление размагничивающего поля.

При исследовании силовых характеристик системы «тор—шар» обычно рассматриваются поля и силы в области  $A$ . В разделе 3 показано, что пондеромоторные силы в областях  $A$  и  $B$  радикально различаются.

На рис. 2 показан нормализованный график векторного поля градиента индукции  $B_{\text{mod}}$  в окрестности максимального значения  $B_{\text{mod}}$  для области  $A$ .

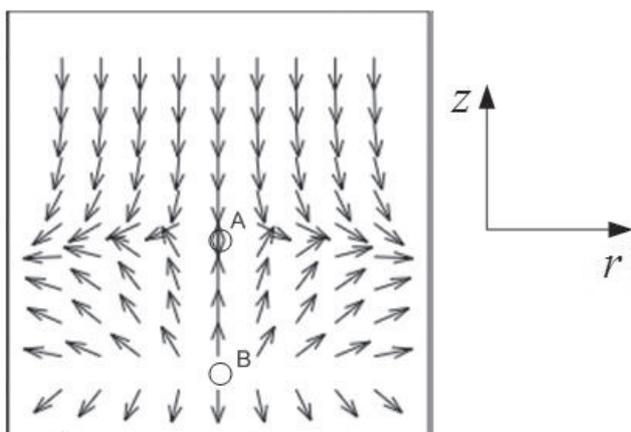


Рис. 2. Векторное поле градиента индукции тора в области  $A$  ( $-1 \text{ см} \leq r \leq 1 \text{ см}; -2 \text{ см} \leq z \leq 6 \text{ см}$ )

Векторное поле указывает на существование стационарной точки  $A$ , в которой наблюдается локальный максимум поля  $H_z$  и минимум  $H_r$ , т. е. на наличие седловой точки. Точка  $B$  соответствует координате  $z_1$  на рис. 1, а.

## 2. Математическая модель

При расчётах пондеромоторных сил, действующих на магнитомягкое тело, в технических приложениях обычно используются уравнения магнитостатики для скалярного потенциала. Расчёты выполняются в рамках уравнений континуальной модели, подразумевающей непрерывное изменение намагниченности в объёме образца. В общем случае в модели скалярный магнитостатический потенциал определяется объёмной и поверхностной дивергенцией намагниченности  $\mathbf{M}$ , т. е. объёмными  $\rho = -\text{div}\mathbf{M}$  и поверхностными  $\sigma = -\text{Div}\mathbf{M}$  «магнитными зарядами» образца. Поверхностные «заряды» возникают при разрыве нормальной компоненты

намагниченности на границе раздела ферромагнетика с немагнитной средой, и их плотность равна  $\sigma = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности образца. Известно [9, 13], что при магнитной восприимчивости материала образца  $\chi \rightarrow \infty$   $\rho = -\text{div}\mathbf{M} = 0$ . В этом случае магнитостатический потенциал образца есть потенциал простого слоя поверхностных «магнитных зарядов» [14]. Плотность распределения  $\sigma$  по известному внешнему полю находится из интегрального уравнения Фредгольма второго рода для намагниченности, решение которого в общем случае сопряжено с определёнными сложностями. В представляемой статье такая задача не ставилась. При расчётах использовалась упрощённая модель расчёта «зарядов».

Для ненасыщенного ферромагнитного шара в однородном внешнем поле  $H_0$  результирующее поле в образце равно

$$H_{\text{рез}} = H_0 - H_p = H_0 - N \cdot M, \quad M \leq M_s, \quad (1)$$

где  $H_p$  и  $N$  — размагничивающее поле и размагничивающий фактор соответственно;  $M_s$  — намагниченность насыщения. Размагничивающее поле однородно, направлено противоположно внешнему полю и по модулю равно  $H_p = N \cdot M$ . Размагничивающий фактор шара  $N = 4\pi/3$ . Магнитная восприимчивость материала  $\chi$  определяется соотношением  $\chi = M/H_{\text{рез}} = M/(H_0 - H_p)$ . При  $\chi \rightarrow \infty$  имеем

$H_0 = H_d$  и, следовательно,  $H_{\text{рез}} = 0$ , т. е. «заряды»  $\sigma_m$  распределяются таким образом, чтобы компенсировать внешнее поле. Для ненасыщенного шара  $H_0 = N \cdot M$ . Откуда получаем зависимость между намагниченностью шара  $M$  и внешним полем  $H_0$

$$M = \frac{3}{4\pi} H_0, \quad H_0 \leq H_s, \quad (2)$$

где  $H_s = (4\pi/3) \cdot M_s$  — поле насыщения шара. Намагниченность насыщения принята равной  $M_s = 1620 \text{ ед}/\text{см}^3$  и  $H_s = 6786 \text{ Э}$ . При использованных в статье параметрах тора и шара насыщение шара не достигается.

Приведённые выше соотношения между внешним полем и намагниченностью шара с учётом структуры поля тора позволяют построить простую математическую модель для расчёта сил, действующих на шар, не решая интегрального уравнения

для намагниченности. Модель предполагает расчёт усреднённых сил, действующих на индуцированные поверхностные «магнитные заряды» шара. При таком приближении при заданной геометрии тора накладываются ограничения на максимальный диаметр шара, при котором возможен расчёт в области левитации.

На рис. 3 показана схема расчёта «зарядов» на поверхности шара радиуса  $R$ .

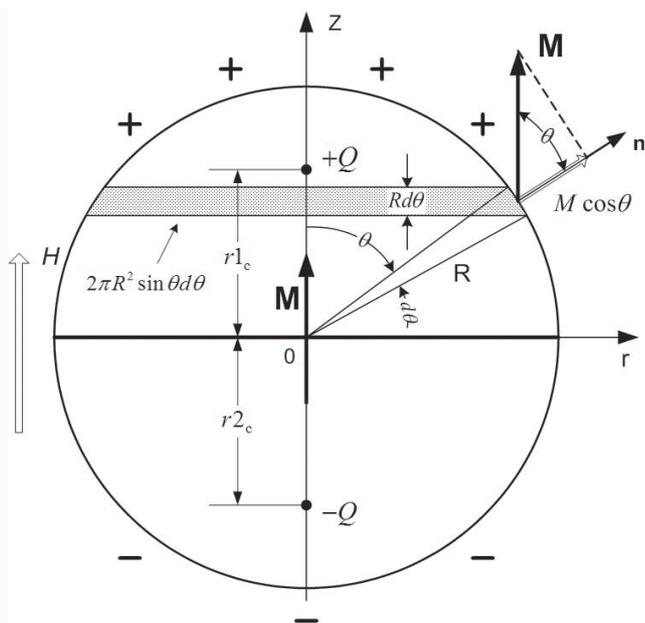


Рис. 3. Схема расчёта поверхностных «магнитных зарядов» шара:  $+Q$  и  $-Q$  — суммарные заряды полушфер, расположенные в «центрах тяжести» зарядов  $r1_c$  и  $r2_c$

Шар делится на две полушферы плоскостью  $Z = \text{const}$ , и рассчитывается суммарный «заряд» для каждой из них. Поле  $H$  неоднородно на диаметре шара. Поэтому «заряды» верхней и нижней полушфер неодинаковы. Для сохранения зарядовой нейтральности шара силы, действующие на шар, усредняются, что эквивалентно усреднению «зарядов».

Плотность поверхностных «магнитных зарядов»  $\sigma = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{n})$  для верхней полушферы равна (2)

$$\sigma_1(r, r1, z, z1, \theta) = \left(\frac{3}{4\pi}\right) \cdot H_z(r, r1, z, z1) \cdot \cos \theta, \quad (3)$$

где  $H_z(r, r1, z, z1)$  — поле тора на поверхности полушферы;  $r1(r, \theta) = r \cdot \sin \theta$ ;  $z1(r, \theta) = r \cdot \cos \theta$ .

Заряд верхнего шарового пояса

$$dQ(r, r1, z, z1, \theta) = \sigma_1(r, r1, z, z1, \theta) \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin \theta d\theta, \quad (4)$$

где  $2\pi R^2 \sin \theta d\theta$  — площадь шарового пояса.

Суммарный «заряд» верхней полушферы равен

$$Q_1(z) = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_1(r, r1, z, z1, \theta) \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin \theta d\theta. \quad (5)$$

Аналогично рассчитывается заряд нижней полушферы:

$$Q_2(z) = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sigma_2(r, r1, z, z1, \theta) \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin \theta d\theta, \quad (6)$$

где  $\sigma_2(r, r1, z, z1, \theta)$  — плотность поверхностных «магнитных зарядов» для нижней полушферы.

$Q_1$  и  $Q_2$  имеют противоположные знаки.

При известных плотностях «зарядов» полушфер возможен прямой расчёт сил, действующих на шар:

$$F_1(z) =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_1(r, r1, z, z1, \theta) 2\pi R^2 \sin \theta \cdot B_{\text{mod}}(r, r1, z, z1) d\theta; \quad (7)$$

$$F_2(z) =$$

$$= 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sigma_2(r, r1, z, z1, \theta) 2\pi R^2 \sin \theta \cdot B_{\text{mod}}(r, r1, z, z1) d\theta. \quad (8)$$

Для нивелирования разности модулей «зарядов» полушфер  $|Q_1|$  и  $|Q_2|$  результирующая сила усредняется:

$$F(z) = \frac{1}{2} (F(z)_1 + F(z)_2). \quad (9)$$

Альтернативный подход заключается во введении в рассмотрение равных по модулю и противоположных по знаку «эффективных зарядов»  $+Q_{\text{эфф}}$  и  $-Q_{\text{эфф}}$ , расположенных в «центрах тяжести зарядов» полушфер (рис. 3). В расчётах удобно использовать модуль «эффективного «заряда», равный

$$Q_{\text{эфф}}(z) = \frac{1}{2} |Q_1(z) - Q_2(z)|. \quad (10)$$

При этом обеспечивается зарядовая нейтральность шара.  $Q_1$  и  $Q_2$  рассчитываются по формулам (5), (6). При уменьшении диаметра сферы в предельном случае ( $R \rightarrow 0$ )  $Q_{\text{эфф}}$  — «заряд» магнитного диполя.

«Центр тяжести зарядов» относительно центра сферы определяется по формулам, известным в механике:

$$r1_c(z) = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_1(r, r1, z, z1, \theta) \cdot 2\pi R^3 \sin^2 \theta d\theta}{|Q_1(z)|};$$

$$r2_c(z) = \frac{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sigma_2(r, r1, z, z1, \theta) \cdot 2\pi R^3 \sin^2 \theta d\theta}{|Q_2(z)|}. \quad (11)$$

Сила, действующая на «заряды», определяется разностью полей в «центрах тяжести зарядов», расположенных на оси Z:

$$F(z) = Q_{эфф}(z)[B_{mod}(r=0, z+r1_c(z)) - (B_{mod}(r=0, z+r2_c(z))]. \quad (12)$$

Диапазоны, в которых происходит смена знака поля, из расчётов исключаются, что определяет область допустимых значений  $Q_{эфф}$ .

Потенциальная энергия шара в поле тора определяется следующим образом:

$$W_{п}(z) = Q_{эфф}(z) \times \left( \int_{z+r_c}^{\infty} B_{mod}(z) dz - \int_{z-r_c}^{\infty} B_{mod}(z) dz \right) = Q_{эфф}(z) \phi(z), \quad (13)$$

где  $\phi(r, z)$  — магнитостатический потенциал шара.

Пондеромоторная сила может быть определена как градиент потенциала  $F(z) = -Q_{эфф}(z)(d\phi(z)/dz)$  или непосредственно через разность полей, действующих на  $+Q_{эфф}$  и  $-Q_{эфф}$ :

$$F(z) = Q_{эфф}(z)[B_{mod}(z+r_c) - B_{mod}(z-r_c)]. \quad (14)$$

Таким образом, задача сведена к «одномерной». Силы, рассчитанные по формулам (9), (12) и (14), совпадают с относительной разницей в несколько процентов.

Расчёты показывают, что модель допускает дальнейшее упрощение, обеспечивающее практически равную предыдущим моделям «точность» определения сил, но использующую более простые расчётные соотношения. Заряд  $Q_1$  верхней полусферы рассчитывается для шара, помещённого в однородное внешнее поле с напряжённостью поля, равной полю в «центре тяжести зарядов» верхней полусферы  $+r_c$ . Заряд  $Q_2$  нижней полусферы определяется для шара в однородном поле при зна-

чении поля в точке  $-r_c$ . Основанием для этого служит относительная линейность поля на диаметре шара, т. е. в рассмотрение вносится своего рода «усреднённое» поле по каждой из полусфер. Заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  рассчитываются отдельно в однородных полях  $H1_{const} = H_z(r=0, z=+r_c)$  для верхней полусферы и  $H2_{const} = H_z(r=0, z=-r_c)$  — для нижней. В однородном поле  $r1_c = r2_c = r_c$ . Сила пропорциональна разнице полей в «центрах тяжести зарядов».

Последовательность расчётов «эффективного заряда» такая же, как и в предыдущем случае. Плотность поверхностных «магнитных зарядов»  $\sigma$  для верхней полусферы равна

$$\sigma1 = M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = \frac{3}{4\pi} H1_{const} \cos \theta. \quad (15)$$

Полный положительный «заряд» полусферы задаётся выражением

$$Q_1(z) = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma1 \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{3R^2 H1_{const}}{2}. \quad (16)$$

Вместо полного «заряда» полусферы в модели вводится точечный равнозначный виртуальный «заряд»  $+Q_1$ , расположенный на оси Z в «центре тяжести зарядов», распределённых по полусфере. Виртуальный «заряд» смещён относительно центра сферы на расстояние

$$r_c = \frac{2 \int_0^{\pi/2} \sigma1 \cdot 2\pi R^3 \sin^2 \theta d\theta}{Q_m} = \frac{2}{3} R. \quad (17)$$

Аналогичные расчёты для нижней полусферы определяют отрицательный «заряд»  $-Q_2$ . Расстояние между «зарядами» равно  $2r_c = 4R/3$ .

Величины  $+Q_1$  и  $-Q_2$  определяются следующим образом:

$$+Q_1(z) = \frac{3R^2 H(r=0, z+r_c)}{2};$$

$$-Q_2(z) = \frac{3R^2 H(r=0, z-r_c)}{2}, \quad (18)$$

где  $z$  — текущая координата центра сферы.

Для выполнения условия зарядовой нейтральности сферы вместо «зарядов»  $+Q_1$  и  $-Q_1$  в рассмотрение вводится эффективный «заряд»:

$$Q_{\text{эфф}}(z) = \frac{|Q_1(z)| + |Q_2(z)|}{2} = 3R^2 \left( \frac{H(r, z+r_c) + H(r, z-r_c)}{2} \right) \quad (19)$$

Теперь считается, что полусферы разноимённо заряжены и их «эффективные заряды» равны. В результате вычисление сил, действующих на шар, сводится к определению сил, действующих на жёстко связанные одинаковые по абсолютной величине положительный  $Q_1$  и отрицательный  $Q_2$  «магнитные заряды» аналогично (12)–(14). При известном графике  $B_{\text{mod}} = B_z(r=0, z)$  вдоль оси  $Z$  задача расчёта силы с использованием этой модели сводится к «арифметической».  $B_z(r=0, z)$  легко рассчитывается с использованием токового аналога тора — двух соленоидов с противоположным направлением токов в обмотках.

Дипольный момент шара можно определить как  $P_{\text{дип}}(z) = Q_{\text{эфф}}(z) \cdot 2r_c$ . Для диполя  $|Q_1| = |Q_2| = Q_{\text{эфф}}$ , и пондеромоторная сила равна

$$F_{\text{дип}}(z) = P_{\text{дип}}(z) \nabla \cdot B_{\text{mod}}(z).$$

Дипольная модель применима для шара диаметром, много меньшим внутреннего диаметра тора, и обеспечивает повышенную точность расчёта сил.

При приложении внешней силы  $f$ , направленной по оси ( $-Z$ ), результирующая сила равна раз-

ности сил, действующих на шар  $F_f(z) = F(z) - f$ . Если в качестве внешней силы рассматривать гравитационный вес шара  $G$ , то  $F_f(z)$  записывается следующим образом:

$$F_f(z) = F(z) - G(R, P_{\text{уд}}), \quad (20)$$

где  $G(R, P_{\text{уд}}) = P_{\text{уд}} (4/3)\pi R^3$ ;  $P_{\text{уд}}$  — удельная плотность материала шара.

Равновесное положение шара определяется условием  $F_f(z) = 0$ . В диапазоне левитации шара выполняются условия  $|F(z)| - |f| > 0$  и  $dF(z)/dz < 0$ .

### 3. Результаты расчёта пондеромоторных сил

Геометрические и магнитные параметры тора приведены выше. В этом разделе расчёты выполнены для стального шара диаметром  $2R = 1,15$  см. На рис. 4 приведены графики сил свободного шара  $F$  и силы, равной гравитационному весу шара  $F_f = 6,121 \cdot 10^3$  дин ( $P_{\text{уд}} = 7,835$  г/см<sup>3</sup>).

Можно выделить следующие специфические координаты графиков в областях  $A$  и  $B$ :

- $z_1 = -z_2 = 2,23$  см — координаты  $B_{\text{mod}} = 0$ ,  $B_z = 0$ ;
- $z = \pm 3,951$  см — координаты  $B_{\text{mod}} = B_{\text{max}}$ ;

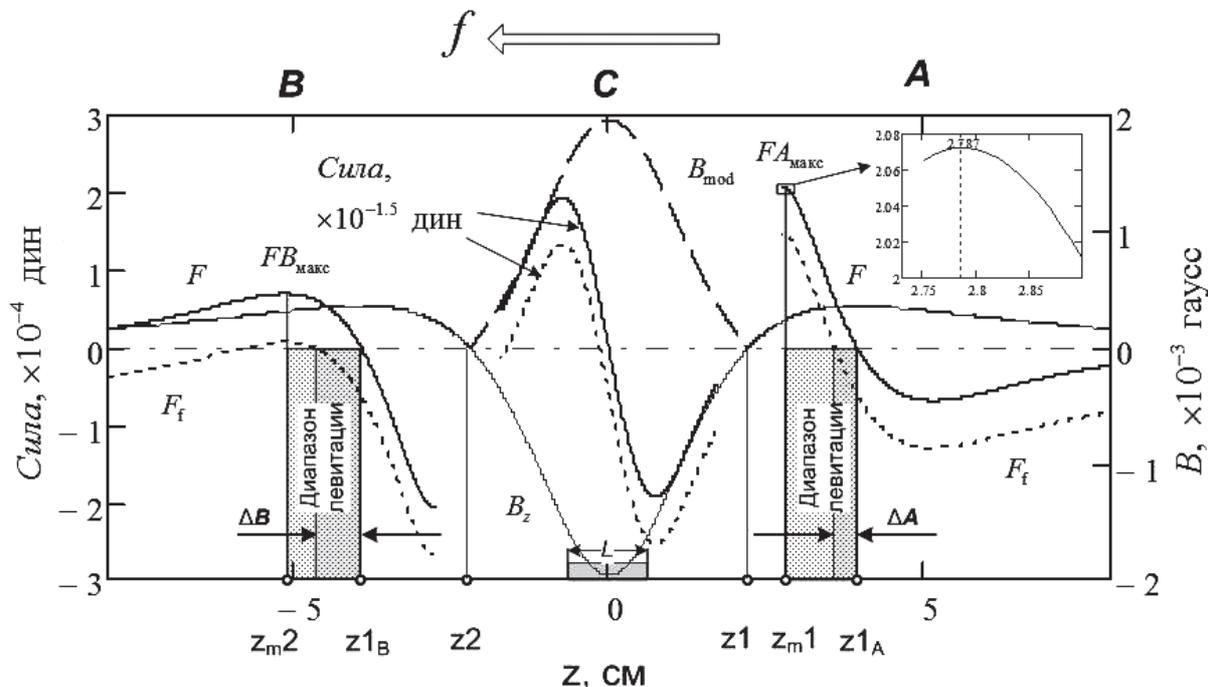


Рис. 4. Графики сил, действующих на шар: сплошная линия — график свободной силы  $F$ ; точечная линия — график силы нагруженного шара  $F_f$ ; пунктирная кривая — график модуля индукции тора  $B_{\text{mod}}$ ; тонкая сплошная линия — график  $Z$  — компоненты индукции  $B_z$ ; прямоугольником  $L$  на графике обозначена в масштабе ширина тора

$z1_A = -z1_B = 3,95 \text{ см}$  — координаты свободного шара  $F_A = F_B = 0$ ;  
 $z = 3,597 \text{ см}$  — координата  $F_f = 0$  нагруженного шара область  $A$ .

Смещение шара при нагрузке в области  $A$ :  $\Delta A = 0,353 \text{ см}$ .

$z = -4,691 \text{ см}$  — координата  $F_f = 0$  нагруженного шара в области  $B$ .

Смещение шара при нагрузке в области  $B$ :  $\Delta B = 0,741 \text{ см}$ .

Координаты максимальных  $z_{m1}$  и  $z_{m2}$  значений сил свободного и нагруженного шаров в областях  $A$  и  $B$  совпадают.

Область  $A$ :  $z_{m1} = 2,787$ ,  $F_{A \max} = 2,072 \cdot 10^4 \text{ дин}$ .

Область  $B$ :  $z_{m2} = -5,168$ ,  $F_{B \max} = 6,846 \cdot 10^3 \text{ дин}$ .

Отношение максимальных сил в областях  $A$  и  $B$  равно:  $F_{A \max} / F_{B \max} = 3,027$ .

Диапазон левитации в области  $A$ :  $\Delta A = 1,164 \text{ см}$ .

Диапазон левитации в области  $B$ :  $\Delta B = 1,217 \text{ см}$ .

Смещения свободного шара относительно максимального значения поля  $H_{\max}$  (см. рис. 1) равны:  $+10^{-3}$  в области  $A$  и  $-10^{-3}$  в области  $B$ .

Из графика силы  $F$  следует: при введении шара в область действия поля тора из  $z = \pm\infty$  на шар действуют силы притяжения, фиксирующие шар вблизи максимумов поля при  $z_{m1}$  и  $z_{m2}$ . При приложении внешней силы  $-f$  (см. рис. 4) шар занимает новое положения равновесия, причём смещение в области  $B$  больше, чем в области  $A$ . При  $|f| > F_{\max}$  ( $F_r < 0$ ) происходит скачкообразный «срыв» шара: из области  $A$  в область  $C$ , а из областей  $C$  и  $B$  в  $(-\infty)$ . Отношение максимальных сил видно из графиков. Силы в области  $C$  значительно превышают силы в областях  $A$  и  $B$  и для удобства восприятия графика построены в масштабе.

График функции  $F$  нечётный относительно начала координат. Функция  $dF/dz$  является монотонной в областях  $B$ ,  $C$  и немонотонной в области  $A$ . Несмотря на полную симметрию профиля поля  $B$ , максимальные силы в областях  $A$  и  $B$  различаются в разы. Координаты максимумов сил в областях  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не зависят от намагниченности тора  $M_z$ . Для ненасыщенного шара с увеличением  $M_z$  возрастает намагниченность шара  $M$  и силы пропорциональны  $M_z^2$ , т. е. пропорциональны градиенту

$B_{\text{mod}}^2$ . Для насыщенного шара силы пропорциональны  $M_z$ . Максимальные значения  $\Delta A_{\max}$ ,  $\Delta B_{\max}$ ,  $\Delta C_{\max}$  определяют диапазоны левитации в областях  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно.

#### 4. Обсуждение. Область применимости и корректность модели

В данном разделе приведены результаты расчётов сил для шара диаметром  $2R = 1,15 \text{ см}$ . Это максимальный диаметр шара, при котором возможен расчёт сил по предложенной модели во всём «диапазоне левитации» при данных геометрических параметрах тора. При большем диаметре шара максимум силы в модели не определяется. Расчёты выполнены для области  $A$ .

На рис. 5 приведён векторный график  $\mathbf{B}_{\text{mod}} = \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_z$  действующего на поверхность шара, в области  $A$  в диапазоне левитации шара ( $1,157 \text{ см} \leq z \leq 2,375 \text{ см}$ ).

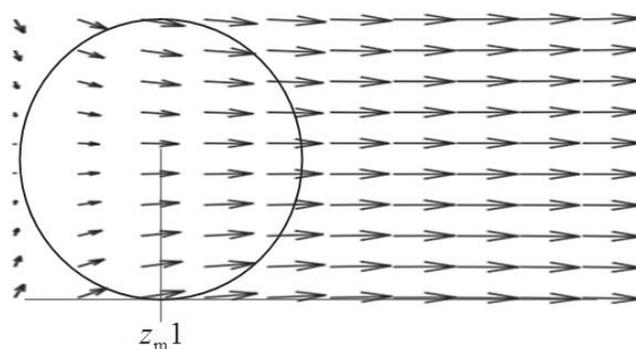


Рис. 5. Векторный график  $B_{\text{mod}}$  в диапазоне левитации шара в области  $A$

Шар на рисунке изображён в масштабе. Показанное положение шара соответствует координате центра шара при  $F_{A \max}$ . Из рисунка следует, что радиальная компонента  $B_r \ll B_z$  во всём диапазоне, за исключением границы левой полусферы. Однако в этой области индукция  $B_{\text{mod}}$  мала, и можно ожидать, что вносимая погрешность невелика. Так что можно считать, что поле в пределах полосы определяется в основном  $z$  — компонентой индукции  $B_z$ .

#### 5. Эксперимент

Для проверки корректности модели были выполнены измерения положения шара в поле тора в зависимости от внешней гравитационной силы, направленной вертикально по оси. Параметры шара и тора определены ранее. Результаты численных расчётов сил, действующих на шар (9), и сил, измеренных экспериментально, приведены на рис. 6.

Для создания внешних сил, нагружающих шар, использовались немагнитные калиброванные по массе шары, размещаемые в трубке над образцом. Отношение максимальной расчётной силы  $F_{\max}$  к измеренной равно 1,35 (отметим, что расчёты по

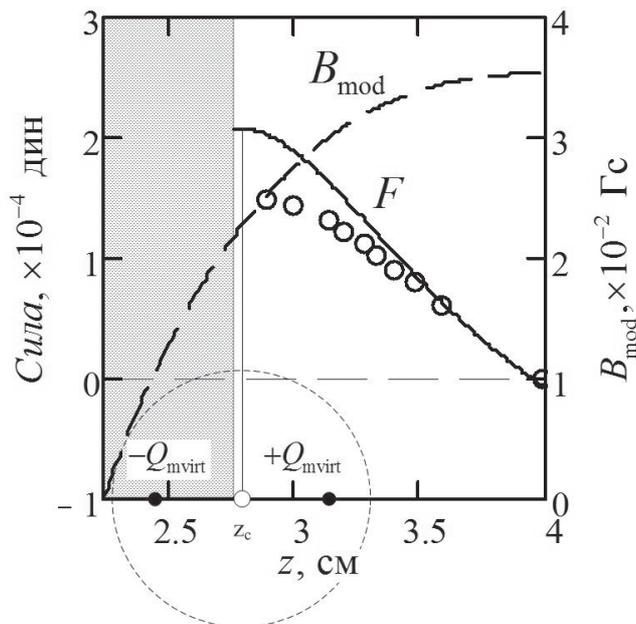


Рис. 6. Результаты численных расчётов сил, действующих на шар, и сил, измеренных экспериментально: сплошная линия — график силы в области *A*; символьная линия — экспериментальные данные; пунктирная линия — график модуля индукции; шар на рисунке изображён в масштабе;  $z_c$  — координата центра свободного шара при  $z = z_{m1}$ ; затемнённым прямоугольником выделена область, в которой модель не применима

(12), (14) лучше согласуются с экспериментом). Относительная разность сил составляет ~15%. Учитывая простоту предложенной теоретической модели, такие результаты могут считаться вполне удовлетворительными. Следует учесть, что шар не подвергался отжигу для уменьшения коэрцитивной силы и имел заметную остаточную намагниченность. Очевидно, что точность модели возрастает для образцов меньшего диаметра (см. рис. 5). Эксперименты с шарами малого диаметра требуют создания высокоточной измерительной установки и проведены не были. Так, например, гравитационный вес  $G$  шара диаметром 0,2 см, для которого по оценкам уже применима модель диполя, равен всего 32,36 дин (0,033 грамм-силы или  $\approx 3,26 \cdot 10^{-4}$  Н).

Корректность модели также подтверждается соответствием численных расчётов с экспериментально измеренными значениями сил, действующих на железный шар в градиентном магнитном поле, приведёнными в [15].

**Выводы**

Разработанная математическая модель применима для полуколичественного расчёта смещений шара в поле тора при воздействии внешних сил. Установлены условия равновесного положения

шара в поле тора и диапазон левитации. Показано, что положение свободного шара в областях *A* и *B* смещено относительно координаты максимума поля тора  $H_{max}$ . Совпадение координат  $H_{max}$  и минимума потенциальной энергии шара возможно только в предельном случае  $R \rightarrow 0$ , т. е. для диполя. Платой за относительную простоту модели является ограничение на максимальный диаметр шара, для которого возможен расчёт сил во всём диапазоне левитации при заданных геометрических размерах тора.

Численные расчёты объясняют наблюдаемое экспериментально значительное различие смещений шара в поле сил тяжести над и под тором. Показано, что пондеромоторные силы в области *B* значительно слабее сил в области *A*. Отношение максимальных сил для этих областей равно  $F_{Amax}/F_{Bmax} \approx 3$ . Это отношение находится в пределах 3—3,5 при других параметрах системы «тор—шар».

Диапазон левитации в области *B* больше, чем в области *A*. Диапазон уменьшается при увеличении диаметра шара. Максимальные диапазоны достигаются в предельном случае  $R \rightarrow 0$  (диполь). Диапазоны левитации (для ненасыщенного шара) не зависят от магнитного момента тора  $M_z$ .

Силы  $F$  пропорциональны  $M_z^2$  для ненасыщенного шара ( $M < M_s$ ) и пропорциональны  $M_z$  при его насыщении ( $M \geq M_s$ ). Установлено, что функция  $dF/dz$  является монотонной в областях *B*, *C* и немонотонной в области *A*.

Несмотря на относительно грубые допущения, принятые при построении математической модели, модель удовлетворительно согласуется с экспериментами.

Из анализа приведённых выше данных следует вывод: модель может быть использована для полуколичественной оценки силовых характеристик в системе «тор—шар». Без подобных оценок затруднительно определить не только ожидаемое значение силы, но даже предсказать порядок её величины.

Расчёты показывают существенное улучшение точности модели для шара малого диаметра. Ограниченный объём статьи не позволяет обсудить полученные результаты для этого случая.

**Библиографический список**

1. Урман Ю.М., Бугрова Н.А., Лапин Н.И. О левитации диамагнитных тел в магнитном поле// Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 25-33.

2. Кузнецов С.И., Урман Ю.М. Исследование возможности левитации сверхпроводящего тела в поле N магнитных полюсов // Журнал технической физики. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 7-14.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 660 с.
4. Geim A. Everyone's magnetism // Physics today. 1998. Vol. 51, pp. 36-39. URL: [http://www.scientific.ru/journal/translations/magn\\_ed.html](http://www.scientific.ru/journal/translations/magn_ed.html).
5. Simon M.D., Geim A.K. Diamagnetic levitation; flying frogs and floating magnets // Journal of applied physics. 2000. Vol. 87. № 9, pp. 6200-6204.
6. Simon M.D., Heflinder L.O., Geim A.K. Diamagnetically stabilized magnet levitation // American journal of physics. 2001. Vol. 69. №6. pp. 702-713.
7. Мартыненко Ю.Г. Движение твёрдого тела в электрических и магнитных полях. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
8. Мартыненко Ю.Г. О проблемах левитации тел в силовых полях // Соросовский образовательный журнал. 1996. №3. С. 82-86.
9. Андреев А.К. Магнитостатика ферромагнетиков. — М.: Изд-во МАИ, 2011. — 162 с.
10. Учебный фильм «Магнитные поля в герконах». Цифровые видеоресурсы СФУ. 1983. URL: <http://tube.sfu-kras.ru/video/271>.
11. Чернышов Н.Н., Луников В.С., Байда Е.И., Крюкова Н.В., Геляровский О.А., Мвуджо Е. Возможности магнитной левитации ферромагнитных тел в градиентном магнитном поле обмоток постоянного тока // Вопросы атомной науки и техники. 2008. №1. С. 115-122.
12. Андреев А.К. Программы для ЭВМ. Свидетельство о Госрегистрации №2012614673. 25.05.2012 г. Бюллетень №3. 2012 г.
13. Коген-Далин В.В., Комаров Е.В. Расчёт и испытание систем с постоянными магнитами. — М.: Энергия, 1977. — 247 с.
14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
15. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1975. — 439 с.

## PONDEROMOTIVE FORCES IN “AXIALLY MAGNETIZED TORUS — SOFT MAGNETIC ORB” SYSTEM

Andreev A.K.

*Moscow Aviation Institute (National Research University),  
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia  
e-mail: alexande\_andreev@yahoo.com*

### Abstract

The field  $H(r,z)$  of axially magnetized torus in the vicinity of its axis of symmetry  $Z$  has been numerically studied. It is shown that the profile of the field allows construct a simple mathematical model to determine ponderomotive forces in the “torus - orb” system. Unloaded (in the absence of external forces  $f=0$ ) soft magnetic orb in the field of the torus has three equilibrium positions near  $H_{max}$ : in the center of the torus, over the torus and under the torus (areas  $C$ ,  $A$  and  $B$ , respectively) - Fig. 1.

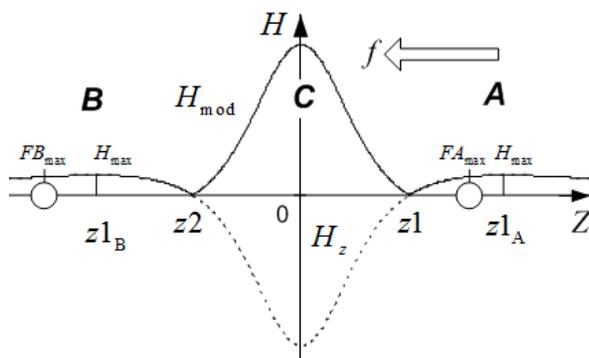


Fig. 1

Stable position of the orb under the load  $f$  is realized under condition of  $dH(r,z)/dz < 0$ . Integral equation for orb magnetizing can not be solved by such model, since it assumes a simplified calculation of the orb polarization in the field of the torus with surface “charges” “averaging” over two hemispheres of the orb, and solution of the forces affecting “magnetic charges” of these hemispheres.

The model allows further simplification by introducing into consideration of “effective magnetic charges” located in the “center of gravity” of the hemispheres charges on the  $Z$ -axis. The forces acting on the point charges are calculated. “Effective charges” provide the “charge” neutrality of the orb. In this manner, the model is reduced to one-dimensional model. The model simplifies the calculations without loss of “accuracy”. Radial  $r$ -component of the field of the torus is much smaller than  $Z$ -component.  $-$ component of the field  $H(r,z)$  is relatively linear in the computation domain. It serves as a basis for the introduction of the one-dimensional model.

In this paper, the calculations were made for the torus of the size of  $9,7 \times 4 \times 1,25$  cm. The magnetization

of the torus is set to  $M_z = 915 \text{ emu/cm}^3$ . The saturation magnetization of the orb is set to  $M_z = 1620 \text{ emu/cm}^3$ . The diameter of the orb is  $2R = 1,15 \text{ cm}$ , the gravity weight is equal to  $6,121 \cdot 10^3 \text{ dyne}$ . The displacements of the orb under its own weight relative to the unloaded orb: in the area  $A$  -  $\Delta A = 0,353 \text{ cm}$ , in the area  $B$  -  $\Delta B = 0,741 \text{ cm}$ , where  $\Delta A < \Delta B$ .

The maximum values of ponderomotive forces, at which the position of the orb is steady, in area  $A$  -  $F_{A \max} = 2,072 \cdot 10^4 \text{ dyne}$ , in area  $B$  -  $F_{B \max} = 6,846 \cdot 10^3 \text{ dyne}$ . The ratio of the maximum forces in the areas  $A$  and  $B$  is equal to:  $F_{A \max} / F_{B \max} = 3,027$ . When  $|f| > F_{\max}$ , an abrupt "reposition" of the orb occurs: from area  $A$  to area  $C$ , and from areas  $C$  and  $B$  to  $(-\infty)$ .

Levitation ranges in the area  $A$  -  $\Delta A = 1.164 \text{ cm}$ , in the area  $B$  -  $\Delta B = 1.217 \text{ cm}$ , where  $\Delta A < \Delta B$ . Displacement of the unloaded orb relative to the maximum value of the field is equal to:  $+10^{-3} \text{ cm}$  in the area  $A$  and  $-10^{-3} \text{ cm}$  in the area  $B$ . The area  $C$  is not considered in this paper.

Numerical calculations explain the experimentally observed significant difference in the displacement of the orb in the field of gravity and maximal forces  $F_{A \max}$  and  $F_{B \max}$  above and under the torus. When the diameter of the orb is greater than it reaches the area of the sign reversal of the torus field, and the maximum value of the force is not defined in the model.

The experiment showed that the ratio of maximum calculated force  $F_{\max}$  to the force measured in the area  $A$  is equal to 1,37. It is obvious that the accuracy of the model increases for the samples of smaller diameter.

Taking into account the given above data it can be concluded that the model can be implemented for semi-quantitative evaluation of the power characteristics of the system "torus-orb".

**Keywords:** magnetic levitation, magnetization, axially magnetized torus, ponderomotive forces, soft magnetic orb, magnetostatic potential, "magnetic charges", demagnetization factor.

## References

1. Urman Yu.M., Bugrova N.A., Lapin N.I. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2010, vol. 80, no. 9, pp. 25-33.
2. Kuznetsov S.I., Urman Yu.M. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2006, vol. 76, no. 3, pp. 7-14.
3. Tamm I.E. *Osnovy teorii elektrichestva* (Basics of the theory of electricity), Moscow, Nauka, 1976, 660 p.
4. Geim A. Everyone's magnetism. *Physics today*, 1998, vol. 51, pp. 36-39.
5. Simon M.D., Geim A.K. Diamagnetic levitation; flying frogs and floating magnets. *Journal of applied physics*, 2000, vol. 87, no. 9, pp. 6200-6204.
6. Simon M.D., Heflinger L.O., Geim A.K. Diamagnetically stabilized magnet levitation. *American journal of physics*, 2001, vol. 69, no. 6, pp. 702-713.
7. Martynenko Yu.G. *Dvizhenie tverdogo tela v elektricheskikh i magnitnykh polyakh* (Movement of a solid body in electric and magnetic fields), Moscow, Nauka, 1988, 368 p.
8. Martynenko Yu.G. *Sorosovskii obrazovatel'nyi zhurnal*, 1996, no. 3, pp. 82-86.
9. Andreev A.K. *Magnitostatika ferromagnetikov* (Magnetostatics of ferromagnetics), Moscow, MAI, 2011, 162 p.
10. *Magnitnye polya v gerkonakh* (Magnetic fields in reed switches), <http://tube.sfu-kras.ru/video/271>, 1983.
11. Chernyshov N.N., Lupikov V.S., Baida E.I., Kryukova N.V., Gelyarovskii O.A., Mvudzho E. *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki*, 2008, no. 1, pp. 115-122.
12. Andreev A.K. Svidetel'stvo o Gosregistracii 2012614673, 25.05.2012.
13. Kogen-Dalin V.V., Komarov E.V. *Raschet i ispytanie sistem s postoyannymi magnitami* (Calculation and test of systems with permanent magnets), Moscow, Energiya, 1977, 247 p.
14. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow, Nauka, 1971, 512 p.
15. Parsell E. *Elektrichestvo i magnetizm* (Electricity and magnetism), Moscow, Nauka, 1975, 439 p.