

## ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЁТА

**Николичев И.А.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: ianikolichev@gmail.com*

Рассматривается возможность применения аппарата дуальных чисел для автоматического дифференцирования при решении задач оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов космического аппарата (КА) с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ). Освещаются два аспекта использования дуальных чисел — вычисление правых частей системы дифференциальных уравнений, описывающих оптимальное движение КА с ЭРДУ с учетом действующих возмущений, а также их применение при решении нелинейной краевой задачи принципа максимума методом продолжения. В качестве примеров представлены полученные решения оптимальных с точки зрения потребного количества топлива межорбитальных перелетов с начальной эллиптической орбиты на геостационарную, в рамках двух моделей движения КА — с учетом действия возмущений и без учета.

*Ключевые слова:* электроракетная двигательная установка, дуальные числа, межорбитальный перелет.

### Введение

Применение двигателя малой тяги при совершении тех или иных маневров в окрестности Земли вследствие малости действующего на КА реактивного ускорения порождает длительные траектории перелета, которые, как правило, имеют достаточно сложную структуру и характеризуются большой угловой дальностью. Без сомнения, при рассмотрении таких перелетов для успешного выполнения задач выведения требуется решение целого ряда проблем, связанных с оптимизацией траектории КА. При этом модель, описывающая движение КА, может быть достаточно сложной. Это, в свою очередь, несколько затрудняет использование классических для механики космического полета с малой тягой методов оптимизации, таких, как принцип максимума Понтрягина [1, 2]. Так, например, при решении оптимизационной проблемы с использованием формализма принципа максимума учет возмущений, действующих на КА с ЭРДУ, приводит к значительным трудностям при аналитической записи правых частей сопряженной системы или делает это вовсе невозможным. Во избежание этой проблемы, в данной работе предлагается применение аппарата дуальных чисел для автоматического дифференцирования с целью вычисления правых частей оптимального движения КА.

Также в работе предлагается использование дуальных чисел при решении нелинейной краевой задачи методом продолжения.

### Применение аппарата дуальных чисел для автоматического дифференцирования

Рассматривается возможность применения математического аппарата дуальных чисел для автоматического дифференцирования с целью вычисления необходимых для решения задач оптимизации траекторий КА с ЭРДУ производных. Кратко опишем сам аппарат дуальных чисел и методику его применения для выполнения требуемых расчетов.

Аппарат дуальных чисел подробно изложен в работе [3]. Отметим лишь то, что дуальным называется число вида  $\langle x, x' \rangle = x + dx'$ , где  $x, x' \in \mathbf{R}$ ;  $x$  — действительная часть;  $x'$  — дуальная часть;  $d^2 = 0$ . Для дуальных чисел с единичной дуальной частью определен изоморфизм с пространством  $\mathbf{R}^2$  по аналогии с комплексными числами. Дуальное число с векторной дуальной частью — число вида

$$\langle x, x', x'', \dots \rangle = x + x'd_1 + x''d_2 + \dots$$

Здесь  $x, x', x'' \in \mathbf{R}$ ;  $x$  — действительная часть;  $x', x'', \dots$  составляют вектор дуальной части;

$$d_1^2 = d_2^2 = \dots = d_n^2 = 0, \quad d_i d_j = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Методика расчета производных изложена в [3], приведем ее для случая операций над дуальными числами с единичной дуальной частью. Представим функцию  $f(x)$  в виде ряда Тейлора, дав ей в окрестности точки  $x$  чисто дуальное приращение:

$$f(x + dh) = f(x) + dh \frac{f'(x)}{1!} + (dh)^2 \frac{f''(x)}{2!} + (dh)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots \quad (1)$$

Так как в выражении (1) все слагаемые, для которых множитель  $dh$  имеет степень больше двух, обнуляются, в силу определения дуального числа, то следующее выражение — точное:

$$f(x + dh) = f(x) + dh f'(x). \quad (2)$$

Полагая при этом величину дуальной части  $h=1$ , получаем согласно (2) следующее выражение для производной:

$$\frac{df(x)}{dx} = Dp(f(x + 1d)). \quad (3)$$

Само значение функции  $f(x)$  соответствует действительной части дуального числа. Для получения требуемой величины производной функции достаточно лишь вычислить ее значение в дуальном представлении и взять от него дуальную часть. При этом при реализации вычислительной схемы (производя необходимые вычисления в дуальных числах) автоматически получаем и значения соответствующих производных.

Так как выражение (2) — точное, то ошибка усечения при вычислении производных с помощью дуальных чисел равна нулю. В выражении (3) нет разности, что аналогично методу комплексного шага [4]. Но, в отличие от него, порядки действительной и дуальной частей в правой части выражения (3) или совпадают, или всегда могут быть выбраны таковыми соответствующим заданием величины  $h$ . Поэтому, в отличие от метода комплексного шага, мы не сталкиваемся в данном случае с ошибкой округления при разности двух близких чисел, возможной при вычислении дуального представления  $f(x)$ . Следовательно, оказывается возможным в процессе вычислений автоматически получать значения требуемых производных с относительной точностью, равной точности вычисления функции.

Для случая вычисления частных производных функции нескольких переменных аналогично применяются дуальные числа с векторной дуальной частью [3]. Размерность вектора дуальной части при этом определяется количеством аргументов функ-

ции. Так, для функции двух переменных мы можем использовать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x_1, x_2), x_1 + x'_1 d_1 + 0d_2, x_2 + 0d_1 + x'_2 d_2, \\ y &= \langle y, y', y'' \rangle = y + y' d_1 + y'' d_2, x'_1 = x'_2 = 1, \\ f(x_1, x_2) &= Rp(y), \frac{\partial f}{\partial x_i} = Dp_i(y), i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом, производя вычисление функции нескольких переменных по соотношениям, аналогичным (4), вместе со значением функции мы автоматически получаем и значения производных по всем ее аргументам с той же точностью.

Помимо оговоренных выше преимуществ использования дуальных чисел по сравнению с методом комплексного шага, в работе [3] указывается значительно меньшее количество необходимых вычислений в случае проведения тех же операций.

Аппарат дуальных чисел применяется для автоматического дифференцирования как для чисел с векторной дуальной частью, так и для чисел с единичной частью. Дуальные числа с единичной дуальной частью предлагается использовать при решении нелинейной краевой задачи принципа максимума методом продолжения с целью вычисления матрицы чувствительности, этому посвящен следующий раздел статьи. Дуальные числа с векторной дуальной частью предлагается использовать при решении задачи оптимизации многовиткового межорбитального перелета с учетом наиболее полной модели возмущений. В данном случае предполагается автоматическое вычисление правых частей уравнений оптимального движения КА путем вычисления оптимального гамильтониана — в силу канонического формализма принципа максимума.

### Применение аппарата дуальных чисел в рамках метода продолжения

Формализм принципа максимума Понтрягина сводит поиск экстремали оптимизационной проблемы к решению соответствующей краевой задачи, эквивалентной некоторой системе нелинейных трансцендентных уравнений вида

$$f(p) = 0, f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, p \in \mathbf{R}^n. \quad (5)$$

Использование метода продолжения по параметру [5] для решения системы (5) по сравнению с обычными методами первого порядка имеет ряд преимуществ, основным из которых является присущая ему глобальная сходимость при выполнении ряда предположений [5, 6].

Рассмотрим внутреннюю задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих оптимальный процесс со сглаженным кусочно-непрерывным управлением:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t, \tau), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_1]. \quad (6)$$

Здесь  $x : t \rightarrow \mathbf{R}^N$ ,  $\varphi(x, t, \tau) \in C^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ .

Введя параметр продолжения в краевые условия, определяющие систему (5), мы получаем следующее их представление:

$$\mathbf{K}(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1, \tau) = 0, \mathbf{K} \in C^1(\mathbf{R}^{2N+3}).$$

Таким образом, система (5) теперь явным образом зависит от параметра продолжения и представима в виде  $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \tau) = 0$ . Тогда внешняя задача Коши [5, 6] формулируется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(\tau)} \right)^{-1} \left( \mathbf{f}(\mathbf{p}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right), \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \tau \in [0, 1]. \quad (7)$$

Проинтегрировав внешнюю задачу Коши, приходим к решению системы (5). Описанный подход успешно используется в работах [5, 6]. В частности, он позволяет обеспечить непрерывную гомотопию между вспомогательной (более простой) и основной задачей, соответствующей системе (5); при этом предполагается, что решение вспомогательной задачи известно.

Очевидно, что от точности вычисления элементов матрицы чувствительности для системы (7), входящей в правые части дифференциального уравнения внешней задачи Коши, непосредственно зависит сходимость метода продолжения. При численной аппроксимации частных производных системы (5) по неизвестным параметрам краевой задачи ошибка в определении производных накапливается при внешнем интегрировании, что в итоге может привести к сходу с кривой продолжения. Это негативно сказывается и на самом процессе внешнего интегрирования — «шум» в правых частях дифференциальных уравнений внешней задачи Коши приводит к уменьшению длины шага интегрирования при его автоматическом выборе и к общему снижению устойчивости вычислительного процесса. Поэтому, в силу названных выше причин, в данной работе предлагается использовать аппарат дуальных чисел для вычисления частных производных, составляющих матрицу чувствительности системы (5). Предполагается построение вычислительной схемы с применением дуальных чисел с единичной дуальной частью. Преимущества аппа-

рата дуальных чисел по сравнению с методом комплексного шага и конечно-разностными методами были оговорены ранее. На одном шаге внешнего интегрирования относительная ошибка в вычислении частных производных будет иметь порядок не больший, чем заданная относительная точность внутреннего интегрирования. Повышая точность внешнего интегрирования, удастся снизить ошибку «начальных данных» (на каждом шаге внешнего интегрирования) для внутреннего интегрирования и как следствие — суммарную ошибку вычисления матрицы чувствительности. Повышая точность как внутреннего, так и внешнего интегрирования, удастся добиться более устойчивого процесса продолжения со значительно меньшим числом отброшенных шагов, чем в случае использования метода комплексного шага для вычисления частных производных. Это связано с тем, что при использовании метода комплексного шага для уменьшения ошибки усечения мы стремимся минимизировать величину шага. Как следствие при проведении вычислений в комплексной области мнимая часть выражений имеет обычно величину порядка величины шага приращения (или меньшую). Поэтому при проведении вычислений в комплексной области будет проявляться ошибка округления, связанная с разностью двух близких друг к другу чисел.

Очевидно, что для вычисления элементов матрицы чувствительности требуется проводить внутреннее интегрирование над полем дуальных чисел. Однако, ввиду сложности численной реализации такого интегрирования, целесообразно применять следующую (эквивалентную ему) схему вычислений:

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{2N}, \mathbf{x}^d \in DualNumber^N; \\ & y_i = \begin{cases} Rp(\varphi(\mathbf{x}^d)_i), i = 1, 2, \dots, N; \\ Dp(\varphi(\mathbf{x}^d)_{i-N}), i = (N+1), \dots, 2N; \end{cases} \\ & \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}, \rightarrow \mathbf{y}\mathbf{1}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Коротко опишем ее. Согласно (8) в действительной области рассматривается новая расширенная система дифференциальных уравнений  $\mathbf{y}$  порядка  $2N$ . Вычисляются правые части системы дифференциальных уравнений  $\varphi(\mathbf{x}^d)$  (порядка  $N$ ) для внутренней задачи Коши в дуальном представлении. Правым частям расширенной системы  $\dot{\mathbf{y}}$  присваиваются соответствующие действительной и дуальной частям значения от вычисленного ранее дуального представления правых частей дифференциальных уравнений; в ходе следующего шага интегри-

рования определяются значения фазового вектора расширенной системы  $\mathbf{y}^1$ . Далее, на основе фазового вектора расширенной системы  $\mathbf{y}^1$ , вновь формируется дуальное представление фазового вектора рассматриваемой системы —  $\mathbf{x}^d$ .

Приведенная выше схема повторяется на каждом шаге внутреннего интегрирования. Интегрируя внутреннюю задачу Коши и вычисляя дуальное представление невязок по краевым условиям, вместе с их значениями мы одновременно получаем и необходимые нам для вычисления матрицы чувствительности производные.

**Процедура вычисления правых частей системы оптимального движения с помощью дуальных чисел**

Данная процедура основывается на использовании канонического формализма принципа максимума: оптимальный гамильтониан полностью определяет систему, описывающую оптимальный процесс. Требуется лишь одно вычисление оптимального гамильтониана в дуальном представлении при каждом обращении к правым частям при численном интегрировании системы уравнений управляемого движения КА. Процедура может быть описана следующей схемой:

$$\left. \begin{aligned} & i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2n; \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T; \\ & \Psi = (\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n)^T; \\ & x_i = x_{i,0} + \sum_{j=1}^{2n} x_{i,j} \cdot d_j; \psi_i = \psi_{i,0} + \sum_{j=1}^{2n} \psi_{i,j} \cdot d_j; \\ & \left. \begin{aligned} & x_{i,j} = 1, j = i; \\ & x_{i,j} = 0, j \neq i; \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} & \psi_{i,j} = 1, j = i + n; \\ & \psi_{i,j} = 0, j \neq i + n; \end{aligned} \right\} \\ & \dot{x}_i = Dp_{n+i}(H^0(\Psi, \mathbf{x})), \dot{\psi}_i = -Dp_i(H^0(\Psi, \mathbf{x})), \\ & H^0 = Rp(H^0(\Psi, \mathbf{x})). \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\mathbf{x}$ ,  $\Psi$  — векторы фазовых и сопряженных переменных системы (дуальное представление) соответственно;  $x_i$ ,  $\psi_i$  — компоненты этих векторов;  $x_{i,0}, \psi_{i,0}$  — действительные части компонент фазового и сопряженного векторов;  $H^0(\Psi, \mathbf{x})$  — дуальное представление оптимального гамильтониана;  $\dot{x}_i, \dot{\psi}_i$  — действительные значения правых частей соответствующих дифференциальных уравнений;  $H^0$  — действительное значение оптимального гамильтониана.

**Модель управляемого движения космического аппарата**

Движение КА с ЭРДУ описывается следующей системой дифференциальных уравнений в равноденственных элементах [7]:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dp}{dt} = 2 \frac{p^{3/2}}{b_1} T; \\ & \frac{de_x}{dt} = \frac{p^{1/2}}{b_1} \times \\ & \quad \times \left( ((1 + b_1) \cos(l) + e_x) T + b_1 \sin(l) S - e_y b_2 W \right); \\ & \frac{de_y}{dt} = \frac{p^{1/2}}{b_1} \times \\ & \quad \times \left( ((1 + b_1) \sin(l) + e_y) T - b_1 \cos(l) S + e_x b_2 W \right); \\ & \frac{di_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{p^{1/2}}{b_1} b_3 \cos(l) W, \quad \frac{di_y}{dt} = \frac{1}{2} \frac{p^{1/2}}{b_1} b_3 \sin(l) W; \\ & \frac{dl}{dt} = \frac{b_1^2}{p^{3/2}} + p^{1/2} \frac{b_2}{b_1} W. \end{aligned} \right\} (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 + e_x \cos(l) + e_y \sin(l); \\ b_2 &= i_x \sin(l) - i_y \cos(l); b_3 = 1 + i_x^2 + i_y^2; \end{aligned}$$

равноденственные элементы  $p, e_x, e_y, i_x, i_y, l$  определяются через классические кеплеровы:

$$\begin{aligned} e_x &= e \cos(\Omega + \omega); e_y = e \sin(\Omega + \omega); \\ i_x &= \text{tg}(i/2) \cos \Omega; i_y = \text{tg}(i/2) \sin \Omega; l = \Omega + \omega + \nu; \end{aligned}$$

$p$  — фокальный параметр;  $e$  — эксцентриситет;  $i$  — наклонение;  $\Omega$  — долгота восходящего узла;  $\omega$  — аргумент перигентра;  $\nu$  — истинная аномалия,  $l$  — истинная долгота;  $S, T, W$  — компоненты реактивного и возмущающих ускорений, действующих на КА:

$$S = S_a + \sum_j S_{\Phi j}; T = T_a + \sum_j T_{\Phi j}; W = W_a + \sum_j W_{\Phi j},$$

где  $S_{\Phi j}, T_{\Phi j}, W_{\Phi j}$  — составляющие ускорения КА, приобретаемые им под действием возмущающих сил различной природы;  $S_a, T_a, W_a$  — компоненты реактивного ускорения, которые определяются в зависимости от модели ЭРДУ.

Для модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги

$$S_a = \delta(P/m)\sin(\vartheta)\cos(\psi);$$

$$T_a = \delta(P/m)\cos(\vartheta)\cos(\psi); \quad W_a = \delta(P/m)\sin(\psi),$$

где  $P$  — тяга ЭРДУ;  $m$  — масса КА;  $\theta, \psi$  — углы тангажа и рысканья;  $\delta$  — параметр работы двигателя,  $\delta \in \{0,1\}$ . Тройка функций

$$\theta(t) \in [0, 2\pi]; \quad \psi(t) \in [-\pi/2, \pi/2]; \quad \delta \in [0, 1]$$

определяет вектор управления КА  $u_{OT} = (\theta, \psi, \delta)$  в данном случае.

Для модели двигателя ограниченной мощности

$$S_a = a_S, \quad T_a = a_T, \quad W_a = a_W.$$

Здесь вектор управления  $u_{OM} = (a_S, a_T, a_W)$  определяется тройкой функций  $a_S(t), a_T(t), a_W(t)$ , принимающих любое значение из  $\mathbf{R}$ .

В случае рассмотрения движения КА с двигателем ограниченной тяги система (9) дополняется уравнением, описывающим изменение его массы во времени:

$$dm/dt = -\delta(P/w),$$

где  $w$  — скорость истечения рабочего тела ЭРДУ;

для случая двигателя ограниченной мощности уравнение приобретает вид

$$dm/dt = -(m^2 a^2)/(2N_r), \quad a = \|a_S, a_T, a_W\|,$$

где  $N_r$  — реактивная мощность ЭРДУ.

### Постановка задачи оптимизации

Требуется осуществить оптимальный с точки зрения потребного количества топлива перелет между начальной и конечной орбитами за фиксированное время. Таким образом, в качестве целевого рассматриваем функционал

$$J = -m(t_f) \rightarrow \min, \quad (10)$$

отвечающий минимальным затратам топлива.

Каждая из двух рассматриваемых нами моделей ЭРДУ порождает, в свою очередь, отдельную задачу оптимизации. Будем называть задачу (10) для модели двигателя ограниченной мощности ОМ-задачей, а для нерегулируемого двигателя ограниченной тяги — ОТ-задачей, следуя терминологии ав-

тора, введенной в работах [5, 6]. Для решения поставленной задачи (10) будем следовать формализму принципа максимума [1, 2]. Представим функцию Гамильтона-Понтрягина в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_3; \\ H_1^{OT} &= \delta(P/m)(a_1 \sin(\vartheta)\cos(\psi) + a_2 \cos(\vartheta)\cos(\psi) + a_3 \sin(\psi)) - \psi_m \delta(P/w); \\ H_1^{OM} &= a_S a_1 + a_T a_2 + a_W a_3 - \psi_m \frac{m^2 (a_S^2 + a_T^2 + a_W^2)}{2N_r}; \\ H_2 &= \psi_l \frac{b_1^2}{p^{3/2}}, \quad H_3 = a_1 \sum_j S_{\Phi_j} + a_2 \sum_j T_{\Phi_j} + a_3 \sum_j W_{\Phi_j}; \\ a_1 &= p^{1/2} (\psi_{e_x} \sin(l) - \psi_{e_y} \cos(l)); \\ a_2 &= \frac{p^{1/2}}{b_1} (2 p \psi_p + \psi_{e_x} ((1 + b_1) \cos(l) + e_x) + \psi_{e_y} ((1 + b_1) \sin(l) + e_y)); \\ a_3 &= \frac{p^{1/2}}{b_1} (b_2 (\psi_{e_y} e_x - \psi_{e_x} e_y + \psi_l) + \frac{b_3}{2} (\psi_{i_x} \cos(l) + \psi_{i_y} \sin(l))). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Здесь  $H_1^{OT}, H_1^{OM}$  — часть функции Гамильтона-Понтрягина, зависящая от управления, для ОТ- и ОМ-задачи соответственно;

$\Psi = (\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, \psi_l); \quad \Psi_m$  — сопряженные переменные.

Терминант рассматриваемой задачи

$$l = \alpha_0(-m(t_f)) + \beta_0 f_0(x(t_0)) + \beta_k f_k(x(t_f)) + \beta_{m0}(m(t_0) - m_0),$$

где  $f_0(x(t_0)), f_k(x(t_f))$  — вектор-функции, определяющие параметры начальной и конечной орбиты;

$x = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l)$ ; числа  $\alpha_0, \beta_{m0}$  и векторы  $\beta_0, \beta_k$  — множители Лагранжа;  $m_0$  — начальная масса КА.

Оптимальное управление в случае рассмотрения модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ u_4^0 \end{pmatrix} = \begin{cases} a_2/\sqrt{a_1^2+a_2^2}; \\ a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2}; \\ \sqrt{a_1^2+a_2^2}/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}; \\ a_3/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}; \end{cases}$$

$$\delta^0 = \begin{cases} 1, & \Pi > 0; \\ 0, & \Pi < 0; \\ \forall \delta \in (0, 1), & \Pi = 0, \end{cases}$$

где  $u_1^0 = \cos(\theta)$ ;  $u_2^0 = \sin(\theta)$ ;  $u_3^0 = \cos(\psi)$ ;  $u_4^0 = \sin(\psi)$ ;

$\Pi = \frac{P}{m}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} - \psi_m \frac{P}{w}$  — функция переключения тяги ЭРДУ.

Оптимальное управление в случае рассмотрения модели двигателя ограниченной мощности

$$a_S^0 = \frac{N_r}{\psi_m m^2} a_1; \quad a_T^0 = \frac{N_r}{\psi_m m^2} a_2; \quad a_W^0 = \frac{N_r}{\psi_m m^2} a_3. \quad (13)$$

Уравнения сопряженной системы для ОТ- и ОМ-задачи с учетом выражений (11)–(13) определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}; \\ \frac{d\psi_m}{dt} &= \delta \frac{P}{m^2} \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}; \\ \frac{d\psi_m}{dt} &= \frac{N_r}{\psi_m m^3} (a_1^2+a_2^2+a_3^2). \end{aligned} \right\}$$

Условия трансверсальности для ОТ- и ОМ-задачи:

$$\begin{aligned} \psi(t_0) &= \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t_0}; & \psi(t_k) &= -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t_k}; \\ \psi_m(t_0) &= \frac{\partial l}{\partial m} \Big|_{t_0}; & \psi_m(t_k) &= -\frac{\partial l}{\partial m} \Big|_{t_k}. \end{aligned}$$

Следующее условие является следствием из условий трансверсальности и неотрицательности и выполняется для обеих задач:  $\psi_m(t_f) = \alpha_0$ ,  $\alpha_0 \geq 0$ . Выбор значения множителя  $\alpha_0$  определяет соответствующую нормировку множителей Лагранжа. В дальнейшем считаем  $\alpha_0 = 1$ .

Оптимальный гамильтониан для ОТ-задачи определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}^{\text{ОТ}} &= \\ &= \delta(P/m)\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} - \psi_m \delta(P/w) + H_2 + H_3, \end{aligned} \quad (14)$$

(12) а в случае ОМ-задачи

$$\widetilde{H}^{\text{ОМ}} = \frac{N_r}{2\psi_m m^2} (a_1^2+a_2^2+a_3^2) + H_2 + H_3. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) предлагается использовать для автоматического вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с учетом действующих на него возмущений различной природы. В данном случае нелинейная краевая задача принципа максимума (5) (для ОМ- и ОТ-задач) решается с использованием гибридного метода Пауэлла.

Для решения ОТ-задачи без учета возмущений, действующих на КА, будем пользоваться методикой, изложенной в работах [5, 6], основанной на применении метода продолжения. Для решения этой задачи будем использовать гомотопию между ОМ-задачей и ОТ-задачей, обеспечивающую непрерывное и гладкое продолжение от решения ОМ-задачи к решению ОТ-задачи. Это достигается введением в правые части системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА параметра продолжения. Таким образом, система дифференциальных уравнений оптимального движения КА, обеспечивающая непрерывное продолжение ОМ-задачи в ОТ-задачу, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l)^T; \\ H^{\text{ОМ}} &= H_1^{\text{ОМ}} + H_2, \quad H^{\text{ОТ}} = H_1^{\text{ОТ}} + H_2; \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H^{\text{ОМ}}}{\partial \psi} + \tau \left( \frac{\partial H^{\text{ОТ}}}{\partial \psi} - \frac{\partial H^{\text{ОМ}}}{\partial \psi} \right); \\ \dot{\psi} &= \tau \left( \frac{\partial H^{\text{ОМ}}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H^{\text{ОТ}}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \frac{\partial H^{\text{ОМ}}}{\partial \mathbf{x}}; \\ \dot{\psi}_m &= \tau \left( \frac{\partial H^{\text{ОМ}}}{\partial m} - \frac{\partial H^{\text{ОТ}}}{\partial m} \right) - \frac{\partial H^{\text{ОМ}}}{\partial m}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для обеспечения непрерывности правых частей в выражениях (16) функция  $\delta$  определяется как  $\delta = 0,5(1 + \Pi / (|\Pi| + \epsilon))$ , где  $\epsilon$  — регуляризатор. При этом, чем меньше значение  $\epsilon$ , тем более эта функция становится кусочно-постоянной.

### Численные примеры

Ниже приведены решения ОТ-задачи без учета возмущений, полученные с помощью метода продолжения и аппроксимации элементов матрицы чувствительности дуальными числами с единичной дуальной частью. Также приведены результаты решения ОТ-задачи с учетом возмущений — в данном случае дуальные числа с векторной дуальной частью использовались для вычисления правых частей системы оптимального движения КА.

#### ОТ-задача без возмущений

Будем рассматривать решения, полученные для следующей задачи межорбитального перелета на геостационарную (ГСО) орбиту. Начальная орбита имеет следующие характеристики: фокальный параметр  $p = 20000$  км, эксцентриситет  $e = 0,75$ , наклонение  $i = 25^\circ$ ; долгота восходящего узла и аргумент перицентра равны нулю. Начальное значение истинной аномалии КА на орбите фиксировано и составляет  $200^\circ$ . Угловая дальность перелета не фиксирована. Продолжительность перелета составляет 90 сут. Характеристики аппарата следующие: начальная масса 1320 кг, тяга ЭРДУ 0,4 Н, удельный импульс 1500 с. В результате перелета относительная конечная масса аппарата составила 0,88865 или 1173,18 кг. Угловая дальность перелета  $\approx 73,2$  полных витка.

Был использован формализм метода продолжения при анализе данной траектории с точки зрения определения оптимальной угловой дальности при перелете между рассматриваемыми орбитами. По-

лученное решение краевой задачи было продолжено по угловой дальности от точки, соответствующей конечному значению истинной долготы  $l_k^0$  приведенного решения, в сторону ее уменьшения на два витка и на семь витков — в сторону увеличения. Это было реализовано по следующей схеме: в краевых условиях задачи вместо условия  $\psi_l(t_f) = 0$  использовалось условие  $l(t_f) - (l_k^0 \pm \tau(2\pi N))$ , где  $N$  — число целых витков,  $\tau$  — параметр продолжения. То есть использовался вариант метода продолжения по краевым условиям, эквивалентный модифицированной ньютоновской гомотопии. Каждому шагу метода продолжения соответствует решение рассматриваемой задачи для текущего значения угловой дальности  $l_k(\tau) = l_k^0 \pm \tau(2\pi N)$ . Результат продолжения ОТ-задачи по угловой дальности представлен на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что зависимость функционала от полной угловой дальности перелета не монотонна и имеет среди множества локально оптимальных решений в пределах каждого витка один ярко выраженный глобальный максимум. Этот максимум достигается при увеличении угловой дальности перелета приблизительно на два витка. Оптимальное значение угловой дальности составило 75,23 витка, величина функционала при этом  $\approx 0,8889$ . На рис. 1 показано значение угловой дальности, полученное при первоначальном решении задачи  $l_k^0$ , и положение глобального максимума величины функционала  $l_k^*$ .

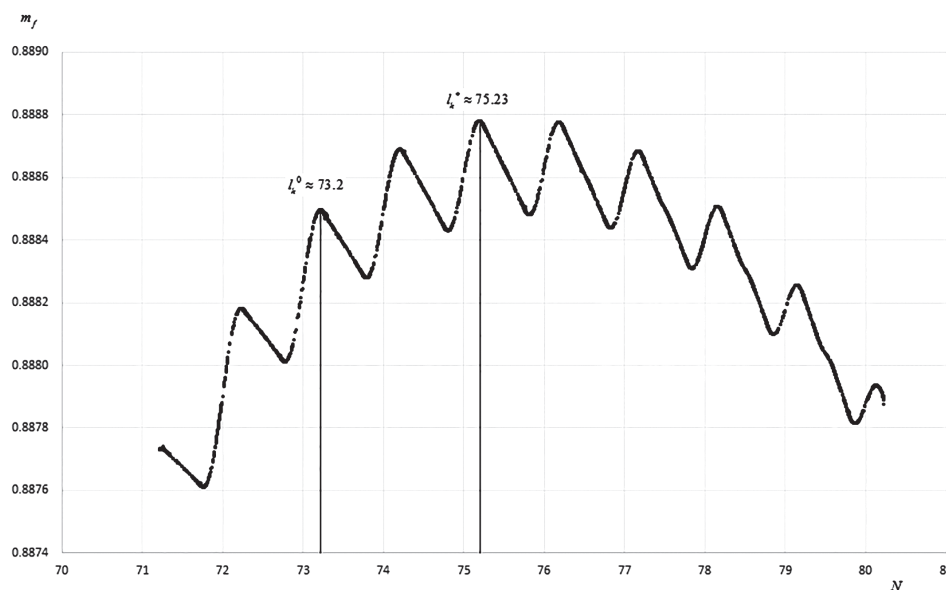


Рис. 1. Зависимость конечной массы аппарата [безр.] от полной угловой дальности  $N$  [число витков] перелета:  $l_k^0$  — угловая дальность, отвечающая первоначальному решению;  $l_k^*$  — глобально-оптимальное значение угловой дальности

Так же было реализовано продолжение решения по крайним условиям задачи с целью установления качественных зависимостей величины функционала от наклона начальной орбиты и величины ее радиуса перицентра. Рассматривалось уменьшение величины наклона начальной орбиты до нуля и увеличение радиуса перицентра начальной орбиты до радиуса ГСО. Угловая дальность перелета в обоих случаях не фиксировалась. На рис. 2 и 3 приведены зависимости безразмерной массы аппарата от наклона начальной орбиты.

Как видно из рис. 2, зависимость конечной массы КА монотонно возрастает с уменьшением накло-

нения начальной орбиты, очевидно, достигая при этом своего максимума в нуле.

Зависимость функционала от безразмерного радиуса перицентра начальной орбиты приведена на рис.3. Радиус перицентра отнесен к радиусу ГСО. Представленная на рис. 3 зависимость немонотонна. Так, с увеличением начального радиуса апоцентра конечная масса КА возрастает, достигая своего максимума при значении радиуса перицентра, меньшего, чем радиус ГСО, а затем начинает убывать.

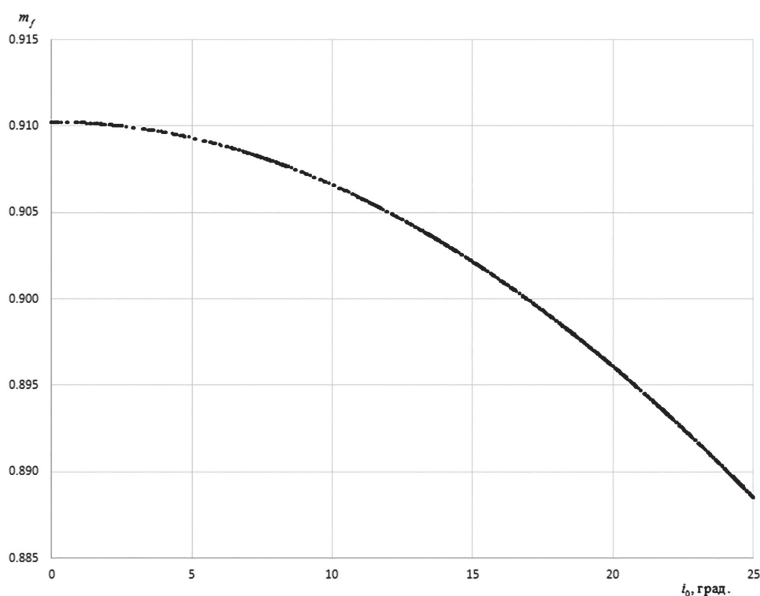


Рис. 2. Зависимость конечной массы КА [безр.] от наклона начальной орбиты  $i_0$  °

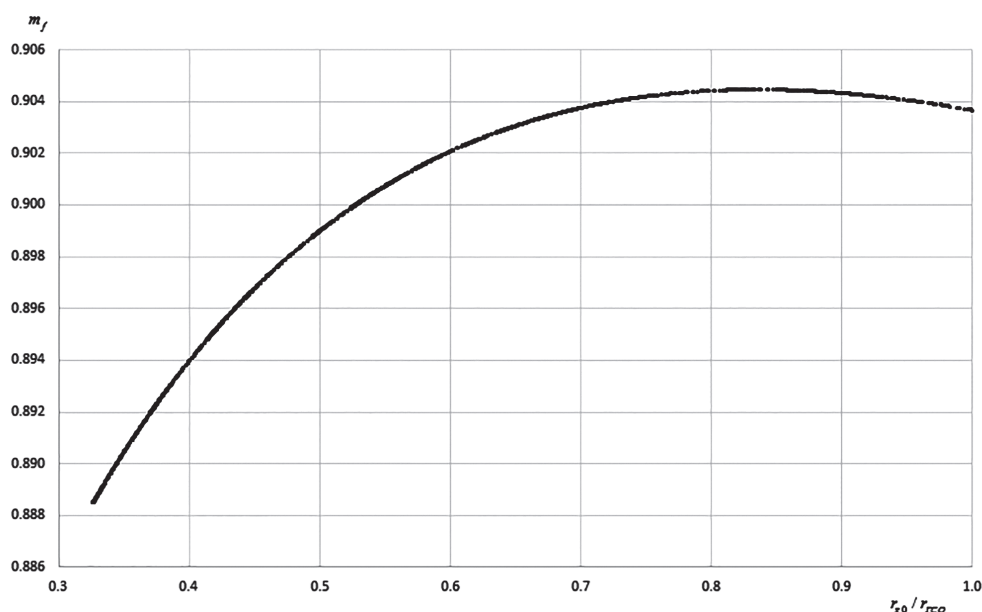


Рис. 3. Зависимость конечной массы КА [безр.] от радиуса перицентра начальной орбиты  $r_{p0}$  [безр.], отнесенного к радиусу ГСО



**ОТ-задача с возмущениями**

В качестве действующих на КА возмущений рассматривались следующие: возмущения от Луны и Солнца, возмущения от нецентральной гравитационного поля Земли. При вычислении лунно-солнечных возмущений координаты Луны и Солнца определялись с помощью программно-эфемеридного обеспечения DE405 [8]. Возмущающие ускорения от нецентральной гравитационного поля вычислялись как производные геопотенциала, представленного в виде разложения в ряд по сферическим функциям, в связанной с Землей системой координат ITRS [9]. При этом учитывались прецессия и нутация земной оси и собственное движение полюса согласно моделям IAU 2006/2000A. Необходимые для этого вычисления производились с помощью библиотеки программ SOFA IAU [9]. Для вычисления геопотенциала использовалась модель гравитационного поля Земли EGM-96.

Параметры начальной орбиты КА следующие: высота перигея 5000 км, высота апогея 80000 км, наклонение  $25^\circ$ . Аргумент перицентра и долгота восходящего узла принимаются равными нулю. Истинная аномалия начальной орбиты  $200^\circ$ . Начальная масса аппарата 2500 кг, тяга 0,56 Н, удельный импульс 1640 с. Продолжительность перелета на ГСО — 120 сут. Рассматривается геопотенциал  $4 \times 4$ . Дата старта соответствует 26 декабря 2015 года 1 час 32 мин UTC.

Решение данной задачи было получено с помощью следующей цепочки вспомогательных решений: сначала решалась осредненная ОМ-задача без учета возмущений, затем — осредненная ОМ-задача с учетом возмущений в рамках представленной выше модели, далее определялось решение неосредненной ОМ-задачи с учетом возмущений — нако-

пец, это решение и использовалось в качестве начального приближения к рассматриваемой нами ОТ-задаче.

В результате полученного решения безразмерная конечная масса аппарата оказалась равной 0,89493, что несколько хуже по сравнению с решением той же задачи без учета возмущений — 0,89540.

На рис. 4—9 представлены основные зависимости, характеризующие полученное решение ОТ-задачи с учетом возмущений. На каждом рисунке с целью сравнения приведено соответствующее невозмущенное решение. На всех рисунках сплошная линия соответствует возмущенному решению, точечная — невозмущенному.

На рис. 4,а представлена зависимость изменения большой полуоси КА от времени. Укрупненный фрагмент данной зависимости на интервале от 18 до 20 суток приведен на рис. 4,б. В обоих случаях большая полуось изменяется немонотонно; при этом явно видно расхождение двух зависимостей, достигающее максимума при значении длительности перелета порядка 50 суток. На рис. 4,б видно проявление действия возмущений от нецентральной гравитационного поля Земли на пассивном участке возмущенной траектории КА при прохождении перицентра орбит.

На рис. 5 и 6 приведены зависимости изменения долготы восходящего узла и аргумента перицентра орбиты КА от времени перелета. Явно виден вклад нецентральной гравитационного поля Земли в эволюцию этих элементов.

На рис. 7,а и 8,а приведены полученные оптимальные программы управления КА по рысканью и тангажу. Укрупненные фрагменты этих зависимостей приведены на рис. 7,б и 8,б. Видно, что изменение углов рысканья и тангажа для возмущен-

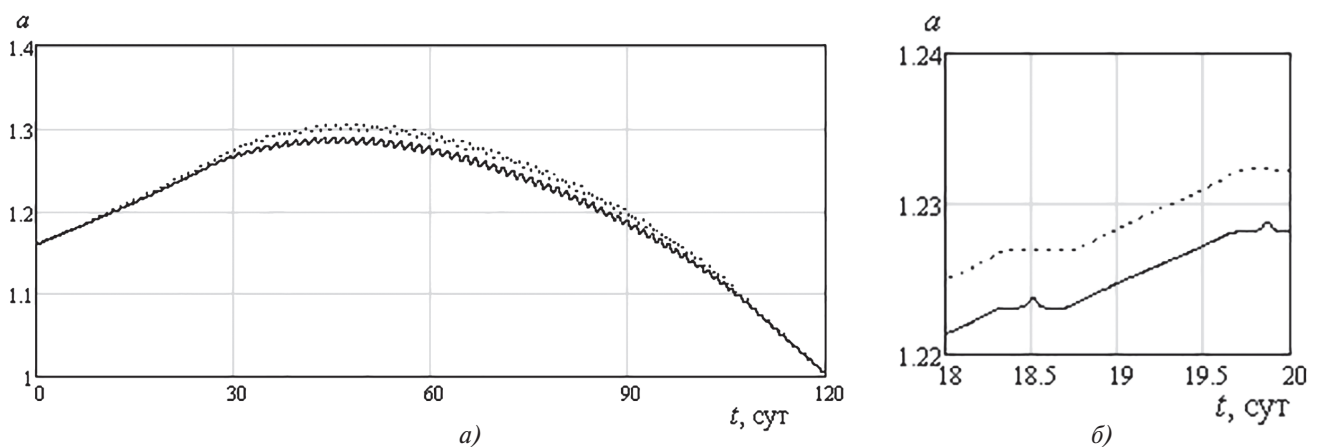


Рис. 4. Эволюция большой полуоси орбиты КА [безр.]: а — для всей длительности перелета; б — на интервале от 18 до 20 суток

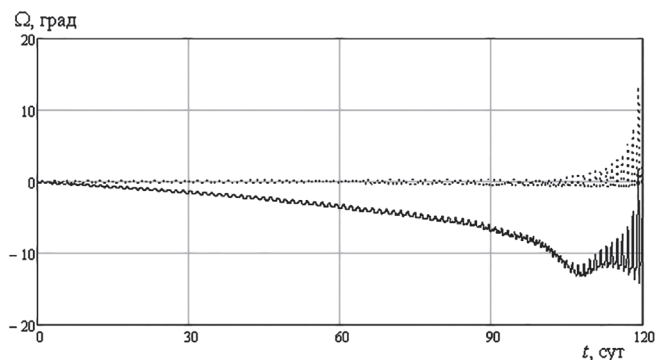


Рис. 5. Эволюция долготы восходящего узла КА

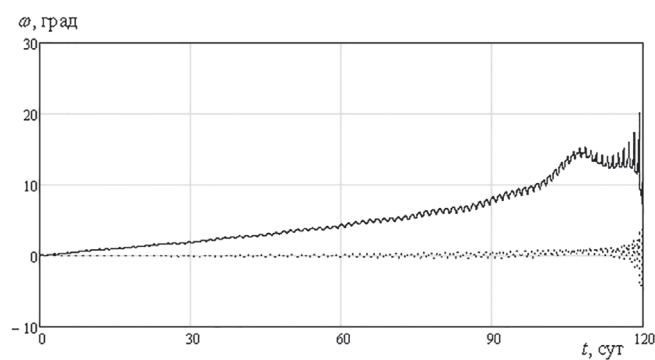


Рис. 6. Эволюция аргумента перигея КА

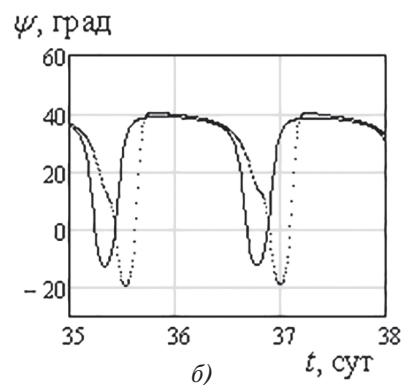
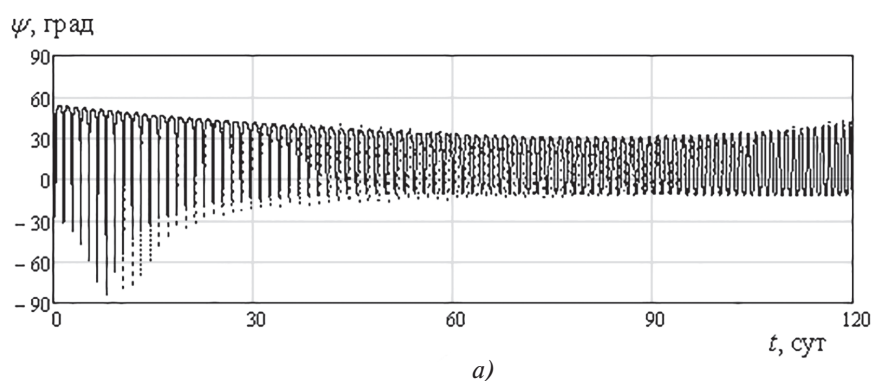


Рис. 7. Зависимость изменения угла рысканья: а — на всем времени перелета; б — на интервале от 35 до 38 суток

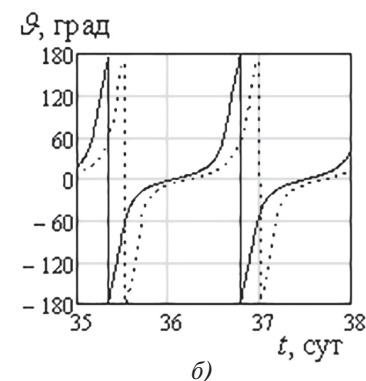
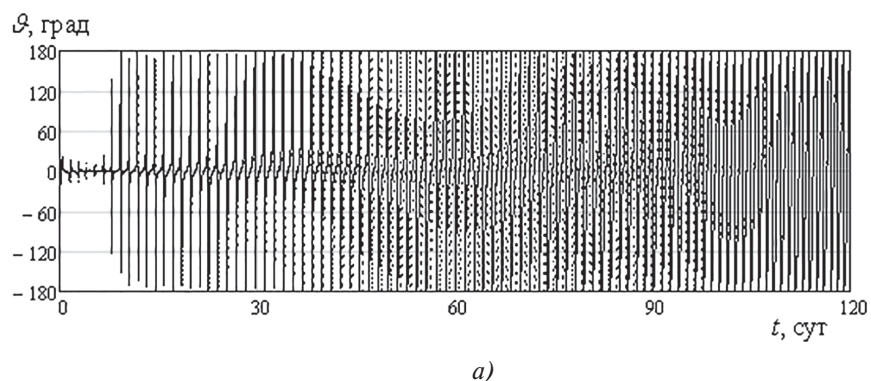


Рис. 8. Зависимость изменения угла тангажа: а — на всем времени перелета; б — на интервале от 35 до 38 суток

ного движения опережает по фазе соответствующее изменение для невозмущенного движения; при этом сам характер зависимостей в целом повторяется. Для функции переключения тяги ЭРДУ ситуация оказывается аналогичной. Фрагмент данной зависимости представлен на рис. 9.

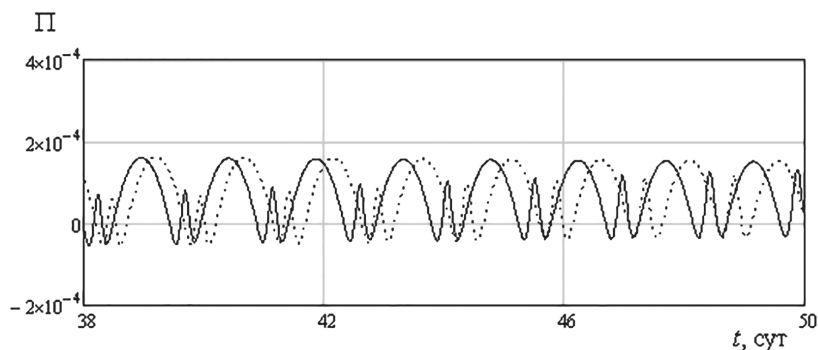


Рис. 9. Функция переключения тяги ЭРДУ на интервале длительности перелета КА от 38 до 50 суток

**Выводы**

Проанализированы два возможных аспекта применения аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Первому аспекту соответствует применение дуальных чисел с единичной дуальной частью для вычисления элементов матрицы чувствительности при решении нелинейной краевой задачи принципа максимума методом продолжения. Второй аспект подразумевает использование дуальных чисел с векторной дуальной частью с целью вычисления правых частей системы оптимального движения в случае решения задачи оптимизации межорбитального перелета КА с учетом наиболее полной модели действующих возмущений.

Приведены и проанализированы результаты применения аппарата дуальных чисел на примере решения задачи оптимального по расходу топлива межорбитального перелета КА с ЭРДУ с начальной эллиптической орбиты на ГСО.

**Библиографический список**

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
2. Афанасьев А.П., Дукусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990. — 320 с.
3. Yu W., Blaire M. DNAD A Simple Tool for Automatic Differentiation of Fortran Codes Using Dual Numbers // Computer Physics Communications. 2013. Vol. 184. No. 5, pp. 1446-1452.
4. Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J. The Complex-Step Derivative Approximation// ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29. No. 3, pp. 245-262.
5. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 3. С. 258-270.
6. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. Дис. ... доктора технических наук. — М.: Изд-во МАИ, 2013. — 224 с.
7. Brouke R.A., Cefola P.J. On the Equinoctial Orbital Elements // Celestial Mechanics, 1972. Vol. 5, pp. 303-310.
8. Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.F. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, 1995, pp. 1-27.
9. The SOFA Software Libraries. International Astronomical Union. Division 1: Fundamental Astronomy, Commission 19: Rotation of the Earth, Standards of Fundamental Astronomy Board. URL: www.iausofa.org, 2013.

## APPLICATION OF DUAL NUMBERS FOR SOLVING THE PROBLEMS OF INTERORBITAL FLIGHT OPTIMIZATION

**Nikolichev I.A.**

*Moscow Aviation Institute (National Research University),  
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia  
e-mail: ianikolichev@gmail.com*

**Abstract****Subject**

The subject of this article is to analyze two aspects of application of the dual numbers for solving optimization problems of the multi revolution interorbital flight of the spacecraft with electric propulsion system.

**Purpose**

The purpose of this article is to demonstrate the possibility of using dual numbers in solving complicated optimization problems of the interorbital flight.

**Methodology**

The paper analyzed two aspects of application of the dual numbers to calculate the required derivatives during

the solving optimization problems of the interorbital flight of the spacecraft with electric propulsion system. The use of dual numbers allows to determine the values of the derivatives with relative accuracy equals to the precision of function computation. The first aspect corresponds to the use of dual numbers with a single dual part together with the continuation method for calculating the elements of the sensitivity matrix of the system of nonlinear equations corresponding to the boundary value problem of the Pontryagin maximum principle. The second aspect is the use of dual numbers with vector dual part to calculate the right-hand sides of the system of differential equations, which describes the optimal process. By virtue of the canonical formalism of the maximum principle it is necessary to calculate the

optimal Hamiltonian in the dual representation. This approach is used for solving the optimization problem of the interorbital flight when the model of the spacecraft motion takes into account various disturbances.

### Results

The results of two types optimization problems of the interorbital flight of the spacecraft with electric propulsion system between the initial elliptical orbit and geostationary orbit are presented in this paper. The first type of problem corresponds to the motion model of the spacecraft in the central gravitational field under the influence of the reactive acceleration. For the second type the model takes into account the effect of the Moon and Sun attraction, and disturbance caused by the Earth's gravitational field noncentrality. The functional that corresponds to the minimum mass of required fuel quantity is considered for both problems. Solution of the first type was obtained by using the continuation method and approximation of elements of the sensitivity matrix using dual numbers with a single dual part. For the problem of the second type, dual numbers with vector dual part is often used when we determining the right-hand sides of differential equations of optimal motion of the spacecraft. The nonlinear boundary value problem in this case was solved by a hybrid Powell algorithm.

### Practical implications

Overall, the methodological approach of the using dual numbers for automatic differentiation outlined in this paper can be used for solving any optimization problems, where model of the object motion is described in a complicated manner.

### Conclusions

This paper shows, that the using of the device of the dual numbers for computing required derivatives can efficiently solve complicated optimization problems of the interorbital flight of the spacecraft with electric propulsion system.

**Keywords:** spacecraft, electric propulsion system, dual numbers, interorbital flight.

### References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow, Nauka, 1969, 384 p.
2. Afanas'ev A.P., Dikumar V.V., Milyutin A.A., Chukanov S.A. *Neobkhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii* (The necessary condition in the optimal control), Moscow, Nauka, 1990, 320 p.
3. Yu W., Blaire M. DNAD A Simple Tool for Automatic Differentiation of Fortran Codes Using Dual Numbers. *Computer Physics Communications*, 2013, vol.184, no. 5, pp. 1446-1452.
4. Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J. The Complex-Step Derivative Approximation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, September 2003, vol. 29, no. 3, pp. 245–262.
5. Petukhov V.G. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2012, vol. 50, no.3, pp. 258–270.
6. Petukhov V.G. *Optimizatsiya traektorii kosmicheskikh apparatov s elektroraketnymi dvigatel'nyimi ustanovkami metodom prodolzheniya* (The optimization of the spacecraft trajectories with electric propulsion system by continuation method), Doctor's thesis, Moscow, MAI, 2013, 224 p.
7. Brouke R.A., Cefola P.J. On the Equinoctial Orbital Elements. *Celestial Mechanics*, 1972, vol. 5, pp. 303-310.
8. Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.F. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, 1995, pp. 1-27.
9. *The SOFA Software Libraries. International Astronomical Union. Division 1: Fundamental Astronomy, Commission 19: Rotation of the Earth, Standards Of Fundamental Astronomy Board*, available at: [www.iausofa.org](http://www.iausofa.org), 2013.