

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ В СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ ПРОЦЕССОВ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Андрей Владимирович БОРИСОВ родился в 1965 г. в городе Москве. Старший научный сотрудник Института проблем информатики РАН. Кандидат физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области системного анализа, управления и обработки информации. Автор более 60 научных работ.

Andrey V. BORISOV, Ph.D., was born in 1965, in Moscow. He is a Senior Research Associate at the Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences (IPI RAN) as well as an Associate Professor at the MAI. His research interests are in systems analysis, information management and processing. He has published over 60 technical papers.

Нина Николаевна СКВОРЦОВА родилась в городе Харькове. Старший научный сотрудник Института общей физики им. А. М. Прохорова РАН. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области физики плазмы, турбулентности. Автор более 70 научных работ.

Nina N. SKVORTSOVA, D.Sci., was born in Kharkov. She is a Senior Research Associate at the A.M. Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences. Her research interests are in plasma physics and turbulence. She has published over 70 technical papers.

Алексей Игоревич СТЕФАНОВИЧ родился в 1983 г. в городе Москве. Аспирант Института проблем информатики РАН. Основные научные интересы — в области теоретических основ информатики. Автор четырех научных работ.

Alexey I. STEFANOVICH, was born in 1983, in Moscow. He is working towards the Ph.D. degree at the Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences (IPI RAN). His research interests are in the theoretical foundations of informatics. He has published 4 technical papers.

Предложена информационная технология (ИТ) построения феноменологической модели флуктуаций, основанная на байесовской идентификации скрытых марковских моделей (СММ). Применимость данной ИТ продемонстрирована на ряде модельных примеров, а также на реальных данных со звездаратора TJ-II (СИЕМАТ, Мадрид, Испания).

Введение

Задачи идентификации в стохастических системах по разнородным априорным и статистическим данным традиционно входят в сферу интересов специалистов по обработке информации и управлению. Различные идентификационные методы, и в частности байесовский подход [1], в последние десятилетия развивались весьма динамично. Этот факт связан, прежде всего, с многообразием систем наблюдения, для которых возможно применять байесовский метод, а также с бурным развитием средств вычислительной техники, позволяющим численно решать те задачи, которые ранее казались бесперспективными из-за своей вычислительной сложности.

Задачи идентификации параметров различных плазменных явлений возникают при феноменологическом подходе, который характеризуется отсутствием единой физико-математической модели плазменной турбулентности и направлен на описание отдельных процессов и режимов в плазме. Однако при использовании такого метода множе-

ство проявлений неоднородностей, возникающих в плазме как на микро-, так и на макроуровне, осложняют построение адекватных «локальных» математических моделей. Классифицируя такие модели, можно выделить несколько направлений, разделяемых по используемому математическому аппарату. Необходимость использования различных моделей обусловлена получением новых экспериментальных данных, которые не могут быть объяснены в рамках существующих моделей.

Наиболее развиты модели, основанные на концепции броуновского движения. К их преимуществам можно отнести хорошо развитую теорию и простоту описания и анализа процессов. Однако такой подход предполагает, что приращение процесса на малом интервале времени имеет нормальное распределение, что не соответствует реальным данным: гистограммы, построенные по реальным измерениям флуктуаций плотности плазмы, демонстрируют наличие «тяжелых хвостов» [2, 3, 4].

Другая концепция основана на использовании самоподобных процессов как альтернативы броу-

новскому движению [5, 6, 7]. Такой подход дает лучшее объяснение процессам, протекающим в плазме, однако не может объяснить некоторые явления. Например, оценка параметра Херста для флуктуаций плотности плазмы оказывается зависимой от частоты измерений. Помимо этого, невозможность использования математического аппарата марковских процессов и семимартингалов значительно осложняет задачи анализа и идентификации в соответствующих моделях.

Существуют также модели, которые вместо «кинематического» задания поведения частицы используют уравнения, описывающие эволюцию переходной плотности с помощью интегродифференциальных уравнений в частных производных. Такой метод не предполагает марковости рассматриваемой модели и ограничивается только описанием одно- и двумерных функций распределения вероятности, а задачи анализа и идентификации в таких моделях также весьма сложны. В отличие от первых двух моделей, которые проверялись неоднократно на экспериментальных (реальных) временных выборках турбулентных плазменных сигналов, последняя модель применялась лишь для исследования теоретических плазменных моделей блуждания частиц в определенных типах плазменной турбулентности [8].

Главным выводом, вытекающим из приведенных фактов, является необходимость разработки новых моделей, адекватно описывающих исследуемые плазменные процессы. Новые модели должны опираться на достаточно развитый математический аппарат, обеспечивающий эффективное решение всего ряда задач, возникающих в стохастических системах: анализа, идентификации и оценивания, а также оптимизации и управления. При этом на стадии применения данной модели возникает потребность в создании соответствующей информационной технологии, обеспечивающей решение поставленной практической задачи в рамках имеющегося математического аппарата, и доступных аппаратно-программных и алгоритмических ресурсов.

Под ИТ обычно понимают совокупность систематических и массовых способов создания, накопления, обработки, хранения, передачи и распределения информации (данных, знаний) с помощью средств вычислительной техники и связи [9]. В данной работе предлагается технология построения феноменологической модели флуктуаций плотности турбулентной плазмы, создание которой делится на три этапа:

1) формализация практической задачи, заключающаяся в выборе используемой математической модели явления, и постановка математически корректной задачи идентификации;

2) разработка алгоритма численного решения поставленной задачи оценивания;

3) выбор средств эффективной программной реализации алгоритма решения задачи байесовской идентификации.

Постановка задачи байесовской идентификации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_F, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ рассматривается система наблюдения

$$\left\{ \begin{aligned} x_t &= x_0 + \int_0^t a(x_{s-}, \gamma_{s-}) \theta_{s-} ds + \\ &+ \int_0^t b(x_{s-}, \gamma_{s-}) \theta_{s-} dw_s, \quad x_0 \sim \psi_0(x), \\ \theta_t &= \theta_0 + \int_0^t \Lambda^*(\gamma_{s-}) \theta_{s-} ds + M_t^\theta, \quad \theta_0 \sim p_0, \\ \gamma_t &= \gamma, \quad \gamma \sim F(\cdot), \\ U_t &= \int_0^t A(x_{s-}, \gamma_{s-}) \theta_{s-} ds + \varepsilon W_t, \\ N_t &= \int_0^t \mu(x_{s-}, \gamma_{s-}) \theta_{s-} ds + M_t^N. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь $x_t \in \mathbb{R}$ — ненаблюдаемый диффузионный процесс с переключениями (СММ);

$\theta_t \in \mathcal{S}_n$ — ненаблюдаемый однородный марковский процесс переключений с конечным множеством состояний $\mathcal{S}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$, матрицей интенсивностей переходов Λ и начальным распределением p_0 ;

$U_t \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ — непрерывный процесс наблюдений;

$N_t \in \mathbb{Z}_+$ — считающий процесс наблюдений;

$\gamma \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^{k \times 1}$ — случайный параметр, имеющий известное распределение $F(\mathcal{A}) = \mathbf{P}_F \{\gamma(\omega) \in \mathcal{A}\}$.

Функции

$$a(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} \| a_i(y, q) \|_{i=1, n} : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n},$$

$$b(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} \| b_i(y, q) \|_{i=1, n} : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n},$$

$$A(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} \| A_{ij}(y, q) \|_{i=1, m}^j : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\mu(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} \| \mu_i(y, q) \|_{i=1, n} : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$$

определяют, соответственно, возможный снос и диффузию процесса x , «планы» непрерывных наблюдений U и интенсивности считающих наблюде-

ний N для каждого возможного состояния переключающего процесса θ . При этом произведения $a\theta, b\theta, A\theta$ и $\mu\theta$ под интегралами в правой части системы (1) — текущие значения перечисленных функций в зависимости от реализации переключающего процесса θ . Процессы $w_t \in \mathbb{R}$ и $W_t \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ являются стандартными винеровскими, а $\varepsilon\varepsilon^* > 0$ — невырожденная матрица интенсивностей шумов в непрерывных наблюдениях. Второе и четвертое уравнения в (1) — мартингалные представления марковских процессов θ и N [10], в которых M^θ и M^N являются центрированными $\mathcal{F}_t^{\theta, x, N}$ -согласованными квадратично-интегрируемыми мартингалами.

Относительно системы (1) сделаны следующие предположения.

1. Параметр $\gamma = \gamma(\omega) \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{k \times 1}$ является \mathcal{F}_0 -измеримым случайным вектором с известным распределением: $F(\mathcal{A}) = \mathbf{P}_F\{\gamma(\omega) \in \mathcal{A}\}$; при этом матрица $\Lambda(\cdot)$ и вектор $\mu(\cdot)$ удовлетворяют свойствам интенсивностей, т.е. $\Lambda_{ij}(q) \geq 0$, для любых $i \neq j$, $\sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}(q) \equiv 0$, и $\mu_i(y, q) \geq 0$ для любых $(y, q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$.

2. Начальные условия θ_0 и x_0 \mathcal{F}_0 -измеримы, при этом x_0 имеет плотность распределения $\Psi_0(x)$.

3. $\theta_0, x_0, \gamma, w_t, W_t$ независимы в совокупности.

4. $a_i(x, \gamma), b_i(x, \gamma) \in \mathbf{C}_b^{2,0}(\mathbb{R} \times \mathcal{C})$, причем существуют такие константы $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda} < \infty$, что

$$\underline{\lambda} I_{n \times n} \leq \text{diag } b(x, \gamma) \leq \bar{\lambda} I_{n \times n} \text{ для любых } (x, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}.$$

5. $M^\theta \perp\!\!\!\perp M^N$ [12].

6. $A_{ij}(y, q), \mu_i(y, q) \in \mathbf{C}_b^{0,0}(\mathbb{R} \times \mathcal{C})$.

7. Верно равенство

$$\mathbf{E}_F \left\{ \exp \left[- \int_0^T \theta_{s-}^* A_{s-}^* (\varepsilon\varepsilon^*)^{-1} dW_s - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_{s-}^* A_{s-}^* (\varepsilon\varepsilon^*)^{-1} A_{s-} \theta_{s-} ds - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^T \ln(\mu_{s-} \theta_{s-}) dN_s + \int_0^T (\mu_{s-} \theta_{s-} - 1) ds \right] \right\} = 1,$$

где $A_t = A(x_t, \gamma)$, $\mu_s = \mu(x_s, \gamma)$.

Одномерная функция распределения расширенного состояния системы $z_t = \text{col}(x_t, \gamma_t, \theta_t)$ имеет вид [11]

$$P_j^F(B, G, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_F\{x_t \in B, \gamma_t \in G, \theta_t = e_j\} = \\ = \int_{G \times B} \psi^*(y, q, t) e_j dy F(dq),$$

где вектор-функция $\psi(y, q, t) = \|\psi_k(y, q, t)\|_{k=1, n}$ является решением системы

$$\begin{cases} (\psi(y, q, t))'_t = -(\text{diag } a(y, q)\psi(y, q, t))'_y + \\ + 1/2((\text{diag } b(y, q))^2 \psi(y, q, t))'_{yy} + \\ + \Lambda^*(q)\psi(y, q, t), \quad 0 < t \leq T, \\ \psi(y, q, 0) = \text{diag}(p_0)\psi_0(y). \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{C}_t = \sigma\{U_s, N_s : 0 \leq s \leq t\}$ — поток σ -подалгебр, порожденный процессами наблюдений U и N .

Задача байесовского оценивания в (1) заключается в определении условного распределения

$$\hat{P}_F(B, G, I, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_F\{x_t \in B, \gamma_t \in G, \theta_t \in I \mid \mathcal{C}_t\}.$$

Нахождение данного $\hat{P}_F(B, G, I, t)$ является актуальным в свете того, что для любой функции $f_t = f(z_t)$ состояния z_t , такой, что $\mathbf{E}_F\{f_t^2\} < \infty$, условное математическое ожидание $\hat{f}_t^F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}_F\{f(z_t) \mid \mathcal{C}_t\}$ доставляет минимум среднеквадратическому критерию (СК-критерию):

$$\hat{f}_t^F \in \text{Arg } \min_{\bar{f}_t \in \bar{\mathcal{M}}} \mathbf{E}_F\{\|f_t - \bar{f}_t\|^2\},$$

где множество $\bar{\mathcal{M}}$ допустимых оценок \bar{f}_t состоит из всех \mathcal{C}_t -измеримых случайных величин с конечным вторым моментом.

Уравнения байесовской идентификации

Обозначим через $\mathbf{I}_G(q)$ характеристическую функцию множества G , а через $\mathbf{1}$ — вектор-строку соответствующей размерности, составленную из единиц. Следующее утверждение дает решение поставленной задачи байесовского оценивания.

Теорема 1. При выполнении предположений

1—7 условное распределение процесса z_t относительно имеющихся наблюдений \mathcal{O}_t имеет вид

$$\hat{P}_j^F(B, G, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}_F \{x_t \in B, \gamma_t \in G, \theta_t = e_j \mid \mathcal{O}_t\} = \int_G \int_B \hat{\psi}^*(y, q, t) e_j dy F(dq),$$

$$\hat{\psi}(y, q, t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R} \times \mathcal{T}} \mathbf{1} \tilde{\psi}(v, u, t) dv F(du) \right)^{-1} \tilde{\psi}(y, q, t),$$

где вектор-функция $\tilde{\psi}(y, q, t) = \|\tilde{\psi}_i(y, q, t)\|_{i=\overline{1, n}}$ является обобщенным решением системы стохастических уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(y, q, t) = & \text{diag}(p_0) \psi_0(y) - \int_0^t (\text{diag } a(y, q) \tilde{\psi}(y, q, s-))'_y + \\ & + \int_0^t \left[\frac{1}{2} ((\text{diag } b(y, q))^2 \tilde{\psi}(y, q, s-))''_{yy} + \Lambda^*(q) \tilde{\psi}(y, q, s-) \right] ds + \\ & + \int_0^t \text{diag } \tilde{\psi}(y, q, s-) A^*(y, q) (\epsilon \epsilon^*)^{-1} dU_s + \\ & + \int_0^t (\text{diag } \mu(y, q) - I_{n \times n}) \tilde{\psi}(y, q, s-) (dN_s - ds). \quad (2) \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 основывается на об- щих уравнениях нелинейной фильтрации [12] и абстрактной формуле Байеса [1].

Любую функцию $f_t = f(z_t)$ состояния z_t систе- мы (1) можно представить в виде $f(z_t) = r(x_t, \gamma_t) \theta_t$, где $r(y, q) = \|\tilde{r}_i(y, q)\|_{i=\overline{1, n}}: \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ — вектор-фун-

кция с компонентами $\tilde{r}_i(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} f(y, q, e_i)$. В случае,

если процесс f_t обладает конечным вторым момен- том, его СК-оптимальная оценка существует и представима в виде

$$\hat{f}_t^F = \mathbf{E}_F \{f(z_t) \mid \mathcal{O}_t\} = \frac{\int_{\mathbb{R} \times \mathcal{G}} r(y, q) \tilde{\psi}(y, q, t) dy F(dq)}{\int_{\mathbb{R} \times \mathcal{G}} \mathbf{1} \tilde{\psi}(u, v, t) du F(dv)},$$

т.е. определяется на основе результатов теоремы 1.

Численный метод

и программно-алгоритмическое обеспечение

Для корректного определения численной схемы необходимо сделать следующие допущения:

- область определения процесса x_t ограниче- на интервалом;
- элементы вектора q имеют ограниченные но- сители $[\underline{q}_i, \bar{q}_i]$, $i = \overline{1, k}$.

Предположим, что на всей области определения $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{q}_1, \bar{q}_1] \times \dots \times [\underline{q}_k, \bar{q}_k] \times [0, T]$ сформирована сет- ка G с шагами $\delta_x, \delta_{q_i}, \delta_t$, $i = \overline{1, k}$ как совокупность пересечения гиперплоскостей

$$\begin{aligned} x &= \underline{x} + \delta_x \alpha_x, \quad \alpha_x, \dots, [(\bar{x} - \underline{x}) / \delta_x], \\ q_i &= \underline{q}_i + \delta_{q_i} \alpha_{q_i}, \quad [(\bar{q}_i - \underline{q}_i) / \delta_{q_i}], \quad i = \overline{1, k}, \\ t &= \delta_t \alpha_t, \quad \alpha_t = 0, \dots, [T / \delta_t]. \end{aligned}$$

Пусть $f(x, q, t)$ — функция, определенная на $[\underline{x}, \bar{x}] \times [\underline{q}_1, \bar{q}_1] \times \dots \times [\underline{q}_k, \bar{q}_k] \times [0, T]$, а D^δ — некоторый разностный оператор.

Далее используются следующие обозначения:

$f_{\alpha_x, \alpha_{q_i}, \alpha_t}$ — значения функции f в узле $(x_{\alpha_x}, q_{\alpha_{q_i}}, t_{\alpha_t})$ сетки G ;

f_{α_t} — набор значений f в узлах сетки, соответству- ющих моменту времени t_{α_t} (слой в момент време- ни t_{α_t});

$D^\delta [f_{\alpha_t}]_{\alpha_x, \alpha_{q_i}}$ — результат применения разностного оператора D^δ к слою f_{α_t} , взятый в узле сетки $(x_{\alpha_x}, q_{\alpha_{q_i}}, t_{\alpha_t})$.

Уравнение (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} d\tilde{\psi}(y, q, t) = \\ = [Q(y, q) \tilde{\psi}'_y(y, q, t-) + R(y, q) \tilde{\psi}''_{yy}(y, q, t-) + \\ + S(y, q) \tilde{\psi}(y, q, t-)] dt + \\ + \text{diag } \tilde{\psi}(y, q, t-) A^*(y, q) (\epsilon \epsilon^*)^{-1} dU_t + \\ + \text{diag } \mu(y, q) \tilde{\psi}(y, q, t-) dN_t, \\ \tilde{\psi}(y, q, 0) = \text{diag}(p_0) \psi_0(y), \end{cases} \quad (3)$$

где

$$Q(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} -\text{diag } a(y, q) + 2 \text{diag } b(y, q) \text{diag } b'_y(y, q);$$

$$R(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{diag } b^2(y, q);$$

$$S(y, q) \stackrel{\text{def}}{=} -\text{diag } a'_y(y, q) + (\text{diag } b'_y(y, q))^2 + \\ + \text{diag } b''_{yy}(y, q) + \Lambda^*(q) + I_{n \times n} - \text{diag } \mu(y, q).$$

Для численного решения уравнения (3) используется следующий вариант схемы расщепления [13] для решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\delta_t^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{1}{5}} - \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{pmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} \beta \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{1}{5}} + (1 - \beta) \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{bmatrix}; \\ \delta_t^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{2}{5}} - \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{1}{5}} \end{pmatrix} = L_2 \begin{bmatrix} \beta \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{2}{5}} + (1 - \beta) \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{1}{5}} \end{bmatrix}; \\ \delta_t^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{3}{5}} - \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{2}{5}} \end{pmatrix} = L_3 \begin{bmatrix} \beta \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{3}{5}} + (1 - \beta) \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{2}{5}} \end{bmatrix}; \quad (4) \\ \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{4}{5}} = L_4 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{3}{5}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_{\alpha_{t+1}} = L_5 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t + \frac{4}{5}} \end{bmatrix},$$

где $\beta \in [0, 1]$,

$$L_1 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{bmatrix}_{\alpha_y, \alpha_q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_{\alpha_y, \alpha_q}}{2\delta_y} \left(\tilde{\Psi}_{\alpha_y + 1\alpha_q, \alpha_t} - \tilde{\Psi}_{\alpha_y - 1\alpha_q, \alpha_t} \right), \\ L_2 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{bmatrix}_{\alpha_y, \alpha_q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{\alpha_y, \alpha_q}}{\delta_y^2} \left(\tilde{\Psi}_{\alpha_y + 1\alpha_q, \alpha_t} - 2\tilde{\Psi}_{\alpha_y, \alpha_q, \alpha_t} + \tilde{\Psi}_{\alpha_y - 1\alpha_q, \alpha_t} \right), \\ L_3 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{bmatrix}_{\alpha_y, \alpha_q} \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha_y, \alpha_q} \tilde{\Psi}_{\alpha_y, \alpha_q, \alpha_t}$$

— разностные операторы, аппроксимирующие

$$Q(y, q) \frac{\partial}{\partial y}, \quad R(y, q) \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad S(y, q), \quad \text{а}$$

$$\left(L_4 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{bmatrix}_{\alpha_y, \alpha_q} \right)_i \stackrel{\text{def}}{=} \left(\tilde{\Psi}_{\alpha_y, \alpha_q, \alpha_t} \right)_i \times \exp \left[e_i A_{\alpha_y, \alpha_q} (\epsilon \epsilon^*)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left(U(t_{\alpha_t + 1}) - U(t_{\alpha_t}) - \frac{\delta_t}{2} A_{\alpha_y, \alpha_q} e_i \right) \right], \quad i = \overline{1, n}, \\ L_5 \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{\alpha_t} \end{bmatrix}_{\alpha_y, \alpha_q} \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag } \mu_{\alpha_y, \alpha_q, \alpha_t} \tilde{\Psi}_{\alpha_y, \alpha_q, \alpha_t} (N_{\alpha_t + 1} - N_{\alpha_t}).$$

При программной реализации решения задачи байесовской идентификации с использованием данной схемы возникает проблема нехватки вычислительных ресурсов. Она связана с необходимостью многократно решать систему (4) в каждом узле сетки G . Одним из способов ее решения является использование технологий параллельного программирования, таких, как OpenMP (стандарт для про-

граммирования в модели общей памяти) и MPI (стандарт для программирования в модели обмена сообщениями).

OpenMP — расширение стандартных языков последовательного программирования (Fortran, C/C++) набором директив распараллеливания. Является стандартом параллельного программирования для систем с общей памятью (SMP-систем).

MPI (Message Passing Interface) — стандартизированный интерфейс для построения программ по модели обмена сообщениями. Является стандартом параллельного программирования для вычислительных кластеров.

Приведенная численная схема (4) легко реализуема в рамках указанных технологий, так как может быть независимо применена к подмножествам G_{α_q} сетки G , полученным в результате пересечения

$$G \text{ с гиперплоскостями } q_i = \underline{q}_i + \delta_{q_i} \alpha_{q_i}, \quad \left[(\overline{q}_i - \underline{q}_i) / \delta_{q_i} \right],$$

$i = \overline{1, k}$. Для создания представляемой версии программно-алгоритмического обеспечения (ПАО) задачи байесовской идентификации была выбрана технология OpenMP, так как она позволяет максимально эффективно использовать имеющееся в распоряжении авторов аппаратное обеспечение и с наименьшими затратами разрабатывать версии ПО с параллельными вычислениями на основе исходных версий ПО с последовательными вычислениями. В процессе разработки ПАО также была использована численная библиотека GNU Scientific Library, предоставляющая широкий спектр математических операций, таких, как генераторы случайных чисел, специальные функции, матричные операции и др.

Идентификация параметров плазменной турбулентности по статистическим данным

Изложенные выше теоретические результаты байесовской идентификации в СММ, реализующие их численные алгоритмы и разработанное программное обеспечение позволяют решать задачи идентификации параметров плазменных турбулентных процессов по временным выборкам амплитуд и приращений амплитуд флуктуаций, полученным на реальных плазменных установках. Данный раздел содержит анализ этих результатов и организован следующим образом.

Первые два численных примера основываются на модельных данных и демонстрируют идентификационные возможности разработанного ПАО. Эти примеры призваны показать полное соответствие оценок идентификации параметров, полученных с

помощью ПАО, эталонным значениям этих параметров. Данные эталонные значения выбраны близкими к тем значениям, которые получаются при обработке статистических данных на реальных установках.

В последнем примере идентифицируются параметры процесса флуктуации плотности плазмы в тороидальной установке TJ-II (СИМАТ, Мадрид). Анализируются оценки параметров, вычисленные по результатам различных плазменных выстрелов, демонстрируется однородность полученных оценок и их соответствие экспертным оценкам физиков-экспериментаторов.

Ниже в данном разделе рассматривается упрощенный частный случай системы наблюдения (1):

$$\begin{cases} \theta_t = \theta_0 + \int_0^t \Lambda^* \theta_{s-} ds + M_t^\theta, & \theta_0 \sim p_0; \\ U_t = \int_0^t A \theta_{s-} ds + \varepsilon W_t; \\ \gamma_t = \gamma = \text{col}(\Lambda, A), & \gamma \sim F(\cdot). \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, идентификации подвергаются локальные дрейфы плотности, т.е. компоненты вектора A , а также интенсивность смен локальных дрейфов, т.е. компоненты матрицы Λ .

Модельный пример № 1

На отрезке времени $[0, 200]$ рассматривается система (5) с эталонными значениями:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ 200 & -200 \end{pmatrix}, \quad A = (0, 0), \quad \varepsilon = 2.$$

Наблюдения дискретизируются по времени с шагом $\delta_t = 0,002$. Априорное распределение F вектора параметров γ задано следующим образом: все компоненты вектора независимы в совокупности, $\Lambda_{1,2} \sim R(50, 250)$, $\Lambda_{2,1} \sim R(50, 250)$, $A_1 \sim R(-5, 35)$, $A_2 \sim R(-35, 5)$. Предполагается, что точность наблюдений ε^2 также неизвестна и подлежит оцениванию.

Вычисления были произведены на сервере, оборудованном двумя процессорами Intel Xeon с тактовой частотой 3,6 ГГц и 8 ГБ оперативной памяти. Были выбраны следующие значения шагов по пространственным переменным: $\delta_{A_i} = 5$, $\delta_{\Lambda_{ij}} = 10$.

Время вычислений составило 7733 с.

Данный пример демонстрирует, что в случае совпадения эталонных значений локальных дрейфов

предлагаемое ПАО при несовпадающих начальных условиях для оценок дрейфов с течением времени идентифицирует единое значение. На рис. 1 представлена часть наблюдений, на основе которых строится оценка идентификации. На рис. 2 приведены оценки компонент матрицы Λ в сравнении с их эталонными значениями. Рис. 3 представляет соответствующие значения для компонент вектора A .

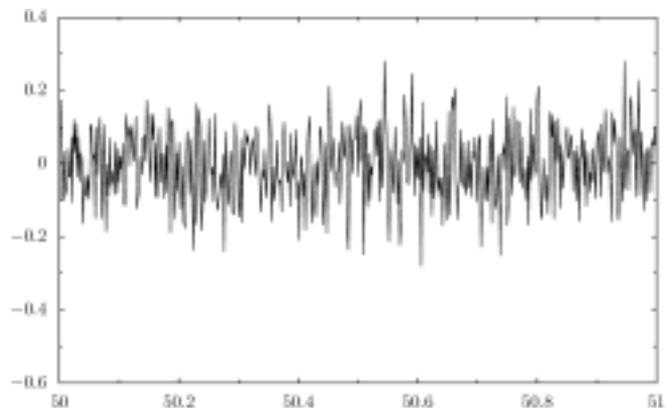


Рис. 1. Приращение ΔU_t наблюдений

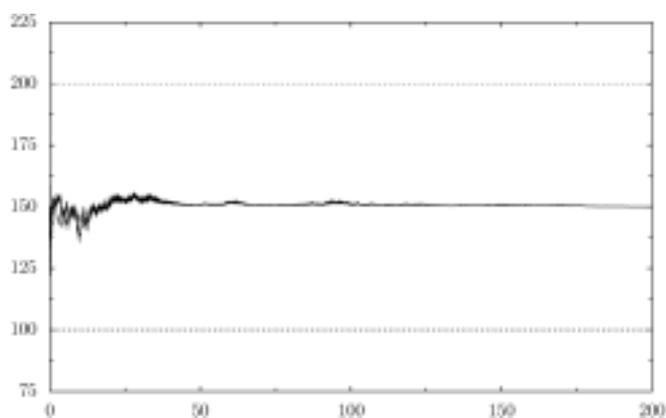


Рис. 2. Оценка компоненты λ_{12} (черная линия), эталонное значение λ_{12} (черный пунктир), оценка компоненты λ_{21} (серая линия), эталонное значение λ_{21} (серый пунктир)

В отличие от идентификации компонент вектора γ , оценивание параметра ε^2 выполнялось другим способом. Известно [14, 15], что марковский процесс с конечным числом состояний, рассмотренный в обратном времени, также имеет маргинальное представление, но с другими характеристиками. Основываясь на этом, ненормированная оценка $\tilde{\theta}_t^s$ сглаживания на фиксированном интервале наблюдения $[0, T]$ состояния марковского процесса θ_t выражается через ненормированные оцен-

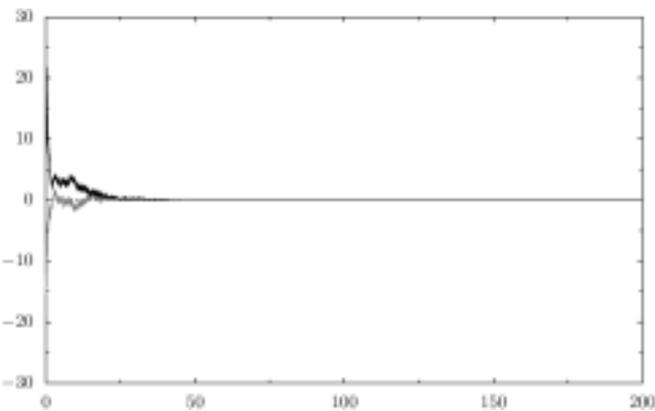


Рис. 3. Оценка компоненты A_1 (черная линия), эталонное значение A_1 (черный пунктир), оценка компоненты A_2 (серая линия), эталонное значение A_2 (серый пунктир)

ки фильтрации в прямом $\tilde{\theta}_t^f$ и обратном $\tilde{\theta}_t^b$ времени следующим образом [16]:

$$\tilde{\theta}_t^s = \text{diag } \tilde{\theta}_t^f [\text{diag } p(t)]^{-1} \tilde{\theta}_t^b,$$

где $p(t)$ — вектор априорного распределения θ_t .

Оценка $\bar{\varepsilon}^2$ в этом случае определяется как

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N\delta_t} \sum_{k=1}^N (\Delta U_{t_k} - \hat{A}(T)\hat{\theta}_{t_k}^s \delta_t)^2. \text{ Для рассматрива-}$$

емой системы наблюдения значение оценки $\bar{\varepsilon}^2$ равно 3,99 по сравнению с истинным значением $\varepsilon^2 = 4$.

Исходя из вида наблюдений U_t в (5) и предполагая, что процесс θ_t на момент начала наблюдений уже находится в стационарном режиме, плотность распределения приращений ΔU_t можно представить в виде

$$\varphi_{\Delta U}(u) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{\sqrt{\delta_t \varepsilon^2}} \varphi_G \left(\frac{u - A_k \delta_t}{\sqrt{\delta_t \varepsilon^2}} \right),$$

где p_k — k -я компонента вектора финальных вероятностей; A_k — k -я компонента вектора A ;

$\varphi_G(\cdot)$ — стандартная гауссовская плотность. Оценка данной плотности $\bar{\varphi}_{\Delta U}(u)$ по идентификационным параметрам представляется как

$$\bar{\varphi}_{\Delta U}(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{p}_k}{\sqrt{\delta_t \bar{\varepsilon}^2}} \varphi_G \left(\frac{u - \hat{A}_k(T)\delta_t}{\sqrt{\delta_t \bar{\varepsilon}^2}} \right)$$

где \bar{p}_k — k -я компонента вектора финальных вероятностей, соответствующих оценке $\hat{\Lambda}(T)$ матрицы интенсивностей Λ .

На рис. 4 указанная оценка плотности $\bar{\varphi}_{\Delta U}(u)$ приведена в сравнении с оценкой Розенблатта—Парзена и гауссианой, построенной по соответствующим выборочным характеристикам. Отметим, что на рисунке представлен лишь тот фрагмент, где эти графики можно визуально различить.

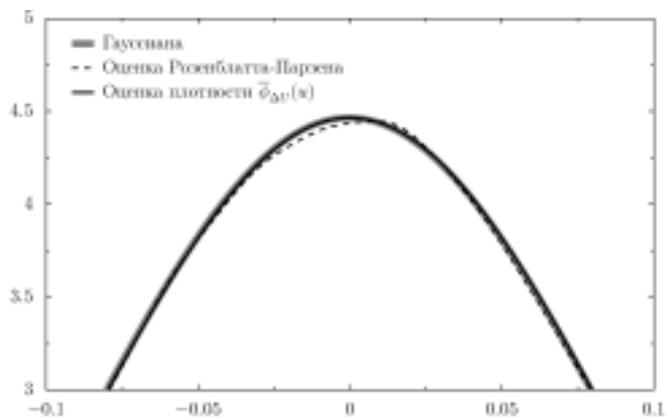


Рис. 4. Оценка Розенблатта—Парзена плотности распределения приращений ΔU_t , оценка, построенная по идентифицированным параметрам, и гауссиана, построенная по выборочным оценкам

По результатам данного численного эксперимента можно сделать следующие выводы.

1. В случае, когда вектор A содержит одинаковые компоненты, разработанное ПАО успешно идентифицирует этот факт; при этом матрица Λ не идентифицируема, т.е. в качестве ее оценки предлагается априорное среднее.

2. Оценка $\bar{\varepsilon}^2$ параметра ε^2 также имеет вполне приемлемую точность.

Модельный пример № 2

На отрезке времени $[0, 200]$ рассматривается система (5) с эталонными значениями

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ 200 & -200 \end{pmatrix}, \quad A = (50, -30), \quad \varepsilon = 2.$$

Наблюдения дискретизируются по времени с шагом $\delta_t = 0.002$. Априорное распределение F вектора параметров γ задано следующим образом: все компоненты вектора независимы в совокупности, $\Lambda_{1,2} \sim R(50, 250)$, $\Lambda_{2,1} \sim R(50, 250)$, $A_1 \sim R(-10, 60)$,

$A_2 \sim R(-60,10)$. Точность наблюдений ε^2 также предполагается неизвестной и подлежит оцениванию.

Были выбраны следующие значения шагов по пространственным переменным: $\delta_{A_i} = 5$, $\delta_{\lambda_{ij}} = 10$.

Время вычислений составило 8181 с.

Данный пример демонстрирует, что в случае несовпадения эталонных значений локальных дрейфов предлагаемое ПАО идентифицирует значения как самих локальных дрейфов, так и интенсивностей их переходов. На рис. 5 представлена часть наблюдений, на основе которых строится оценка идентификации. На рис. 6 представлены оценки компонент матрицы Λ в сравнении с их эталонными значениями. Рис. 7 представляет соответствующие значения для компонент вектора A .

На рис. 8 предлагаемая оценка плотности приведена в сравнении с оценкой Розенблатта—Парзена и гауссианой, построенной по соответствующим выборочным характеристикам.

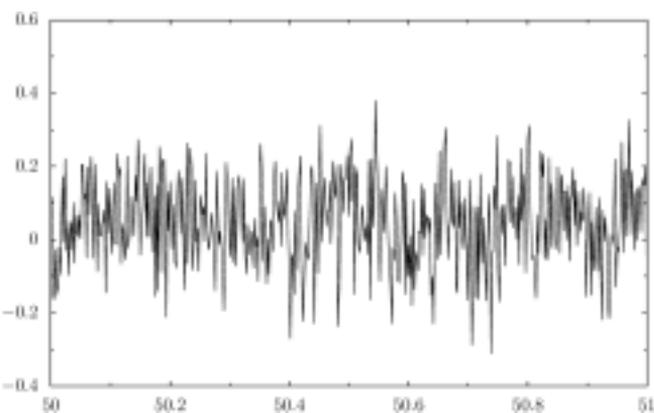


Рис. 5. Приращение ΔU_t наблюдений

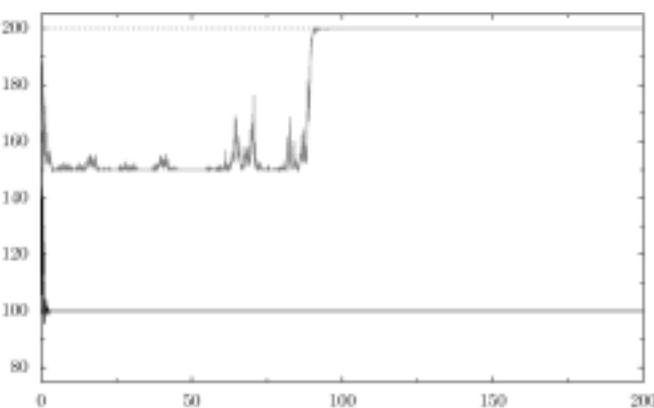


Рис. 6. Оценка компоненты λ_{12} (черная линия), эталонное значение λ_{12} (черный пунктир), оценка компоненты λ_{21} (серая линия), эталонное значение λ_{21} (серый пунктир)

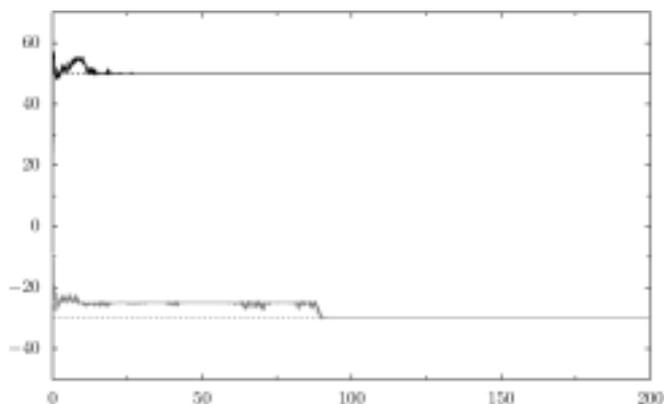


Рис. 7. Оценка компоненты A_1 (черная линия), эталонное значение A_1 (черный пунктир), оценка компоненты A_2 (серая линия), эталонное значение A_2 (серый пунктир)

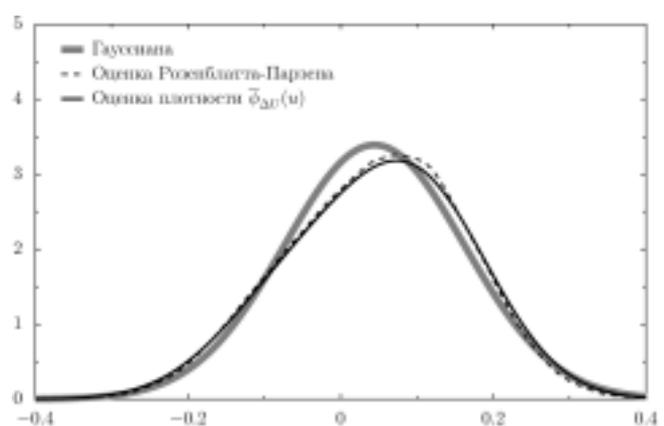


Рис. 8. Оценка Розенблатта-Парзена плотности распределения приращений ΔU_t , оценка, построенная по идентифицированным параметрам, и гауссиана, построенная по выборочным оценкам

Оценка точности наблюдений, вычисленная методом, представленным в предыдущем примере, составила 4,1695 по сравнению с истинным значением 4.

По результатам данного численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. В случае, когда вектор A содержит различные компоненты, разработанное ПАО успешно идентифицирует как значения локальных дрейфов, так и интенсивности их смены.

2. Оценка $\bar{\varepsilon}^2$ параметра ε^2 также имеет вполне приемлемую точность.

3. Предлагаемая параметрическая оценка $\bar{\varphi}_{\Delta U}(u)$ плотности распределения близка к непараметрической оценке Розенблатта—Парзена и значительно лучше гауссовской аппроксимации.

Пример №3: анализ данных с установки ТЖ-II

Реальные данные, используемые для идентификации параметров плазменной турбулентности,

были получены на тороидальной установке ТТ-II («Евроатом — СИЕМАТ», Мадрид, Испания), которая является четырехзаходным стелларатором [4, 7]. Установка имеет следующие параметры:

- большой радиус R — 150 см;
- малый, средний радиусы $\langle r \rangle$ — 10–20 см;
- магнитное поле B — $\leq 1,2$ Т;
- вводимая СВЧ мощность P_0 — 200–400 кВт;
- средняя плотность $\langle n \rangle$ — $< 10^{13}$ см $^{-3}$;
- температура электронов в центре шнура $T_e(0)$ — 500–800 эВ;
- относительная величина флуктуаций на краю плазмы $(\delta_n/n)_{\text{внеш}}$ — 0,2–0,25;
- длительность импульса — 200–300 мс;
- частота съема данных — 0,5 МГц;
- соотношение «сигнал-шум» в измерениях плотности плазмы — 10.

Плазма имеет переменное сечение вдоль тора, со средним радиусом, изменяющимся от 0,1 м до 0,22 м. В эксперименте плазма производилась и нагревалась одним 53,2 ГГц гиротроном на второй гармонике гирочастоты электронов. Данные измерения произведены на середине радиуса шнура в наиболее спокойной области плазмы: вдали от ввода в плазму энергии (высокочастотный нагрев производится в центре плазменного шнура) и диссипации энергии (на краю шнура). Можно рассматривать эту область как аналог пространственного «инерционного» интервала для низкочастотной плазменной турбулентности. После предварительного экспертного анализа на однородность результатов в качестве статистических данных были выбраны измерения плотности плазмы в центре шнура, полученные на отрезках времени [50 мс, 150 мс] в разрядах №№ 8227–8232.

Результаты идентификации параметров по разным выстрелам оказались достаточно близкими друг к другу, однако наиболее показательными являются результаты по разряду № 8228.

Расчеты были проведены в предположении, что априорное распределение F составного вектора параметров γ задано следующим образом: все компоненты вектора независимы в совокупности, $\Lambda_{1,2} \sim R(50,350)$, $\Lambda_{2,1} \sim R(50,350)$, $A_1 \sim R(-10,100)$, $A_2 \sim R(-100,10)$. Точность наблюдений ε^2 предполагается неизвестной и подлежит оцениванию.

Были выбраны следующие значения шагов по пространственным переменным: $\delta_{A_i} = 5$, $\delta_{\Lambda_{ij}} = 30$.

Время вычислений составило 8987 с.

На рис. 9 представлена часть приращений наблюдений разряда № 8228, на основе которых строится оценка идентификации. На рис. 10 представлены оценки компонент матрицы Λ . На рис. 11 изображены соответствующие значения для компо-

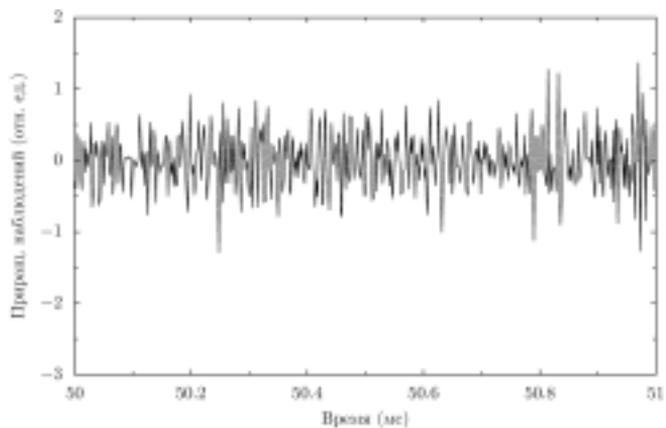


Рис. 9. Приращение ΔU_t наблюдений разряда № 8228

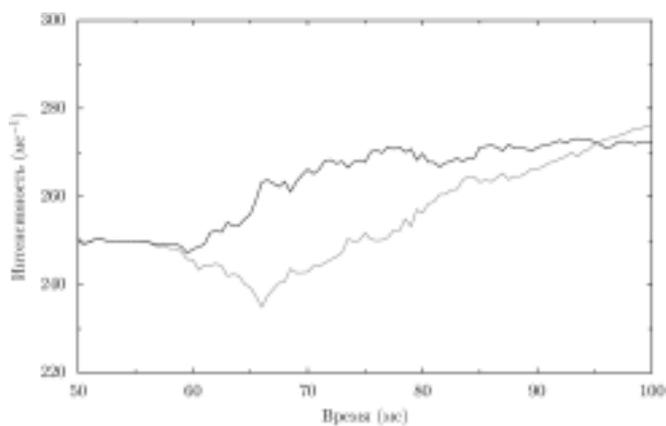


Рис. 10. Оценка компоненты λ_{12} (черная линия) и компоненты λ_{21} (серая линия) по данным разряда № 8228

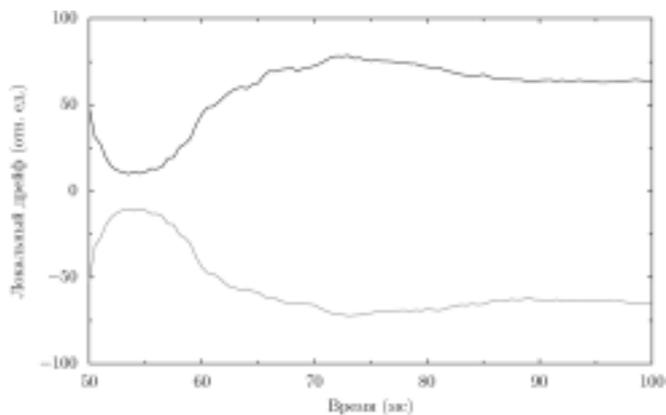


Рис. 11. Оценка компоненты A_1 (черная линия) и компоненты A_2 (серая линия) по данным разряда № 8228

нент вектора A . На рис. 12 предлагаемая оценка плотности приведена в сравнении с оценкой Розенблатта—Парзена и гауссианой, построенной по соответствующим выборочным характеристикам.

Оценка точности наблюдений $\bar{\epsilon}^2$ составила 68,2.

Рис. 13 и 14 представляют результаты идентификации плазменных параметров по всем выбранным выстрелам.

Проведенные численные эксперименты по реальным данным позволяют сделать следующие выводы:

1. Результаты идентификации параметров плазмы однородны по всем выстрелам. Это обстоятельство вполне согласуется с экспертными оценками физиков, которые выбрали статистические данные для их последующей идентификации, исходя из их однородности.

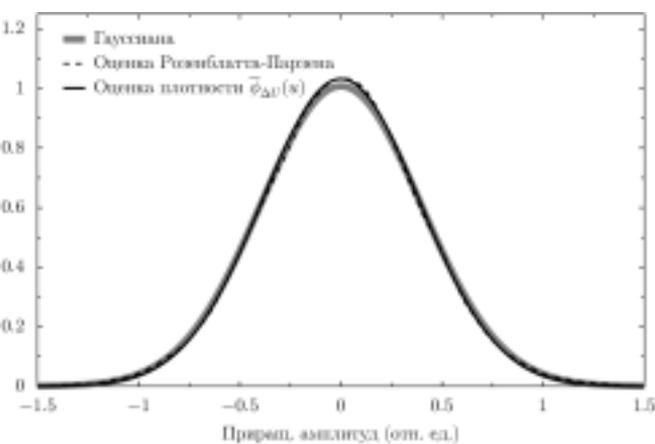


Рис. 12. Оценка Розенблатта—Парзена плотности распределения приращений ΔU_t , оценка, построенная по идентифицированным параметрам, и гауссиана, построенная по выборочным оценкам по данным разряда № 8228

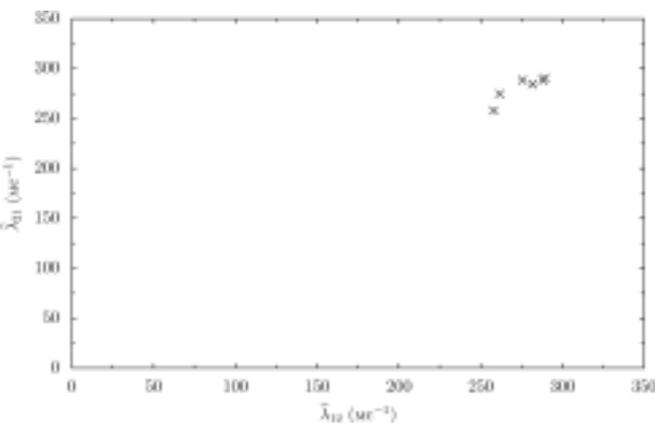


Рис. 13. Идентифицированные значения $(\hat{\lambda}_{12}, \hat{\lambda}_{21})$ для разрядов №№ 8228—8232

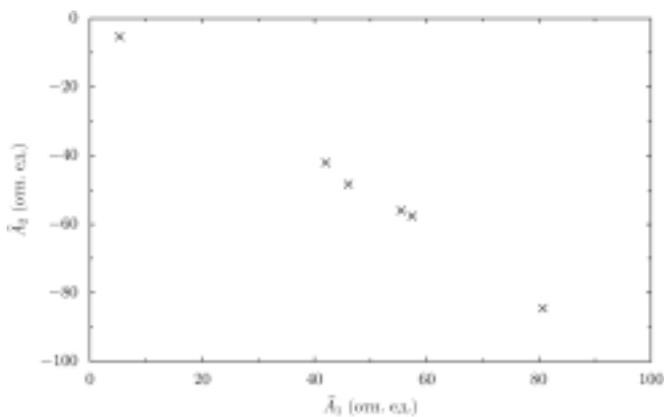


Рис. 14. Идентифицированные значения $(\hat{A}_{12}, \hat{A}_{21})$ для разрядов №№ 8228—8232

2. Для представленных статистических данных достаточно использовать СММ с двумя возможными состояниями.

3. Предлагаемая параметрическая оценка $\bar{\varphi}_{\Delta U}(u)$ плотности распределения близка к непараметрической оценке Розенблатта—Парзена и лучше гауссовской аппроксимации.

4. Выбранные статистические данные соответствуют «спокойной» плазме. Согласно физическим представлениям, в такой плазме нет крупных плазменных структур. Результаты идентификации подтверждают данный факт: оценки интенсивностей смен локальных дрейфов весьма высоки (порядка $250\text{—}290 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$). Данные значения позволяют оценить размеры плазменных структур: в среднем одна плазменная структура пребывает в районе датчика $3,45\text{—}4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, т.е. менее двух отсчетов по времени.

Выводы

Предлагаемая статья содержит следующие результаты:

1. Сформулирована и решена задача байесовской идентификации в системах наблюдения, содержащих СММ с непрерывными и считающими наблюдениями. Оценки идентификации и текущего состояния системы выражаются через решение стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа — аналога уравнения Закаи.

2. Предложен метод численного решения упомянутого уравнения.

3. Для указанного численного метода определена алгоритмическая архитектура, позволяющая эффективным образом распараллелить вычисления. Выбраны программные средства реализации данного распараллеливания и разработан первона-

чальный вариант ПАО. Он был успешно опробован на тестовых (модельных) данных, показав высокую точность (пример № 2) и адекватную реакцию на первоначальную переопределенность модели (пример № 1).

4. Предложенный вариант ПАО был применен для идентификации параметров флуктуации плотности «спокойной» плазмы по данным стелларатора TJ-II. Результаты идентификации являются однородными, больше соответствуют действительности, чем гауссовская аппроксимация, и вполне отвечают физическим представлениям о процессах в «спокойной» плазме.

В качестве возможных направлений дальнейших исследований перспективным представляется формирование математического аппарата теории идентификации для систем наблюдения указанного вида (включая различные понятия идентифицируемости параметров, их условия, свойства и пр.), а также развитие численных методов субоптимального оценивания в системах наблюдения, содержащих СММ.

Summary

An information technology (IT) providing a phenomenological model of turbulent plasma density is presented. Applicability of this IT is demonstrated by both some synthetically modeled data and real measurements from the TJ-II stellarator (CIEMAT, Madrid, Spain).

Библиографический список

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
2. *Батанов Г.М., Бенинг В.Е., Королев В.Ю.* и др. Структурная плазменная низкочастотная турбулентность в стеллараторе L-2M // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78. С. 974-983.
3. *Skvortsova N.N., Korolev V.Yu., Batanov G.M., et al.* Statistical analysis and modelling of turbulent fluxes in the plasma of the L-2M stellarator and the FT-2 tokamak // Plasma Phys. Contr. Fusion. 2006. V. 48, no. 5A. Pp. A393-A399.
4. *Skvortsova N.N., Batanov G.M., et al.* Low-frequency structural plasma turbulence in stellarators. // Korolev V. Yu., Skvortsova N. N. Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence.- Modern Probability and Statistics. Leiden-Boston: VSP, 2006. Pp. 63-86.
5. *Скворцова Н.Н., Сарксян К.А., Харчев Н.К.* Структурная ионно-звуковая плазменная турбулентность как автомодельный случайный процесс // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 70. С. 201-205.
6. *Batanov G.M., Kolik L.V., et al.* Studies of fluctuations in the high-temperature plasma of modern

stellarators by the microwave scattering technique // Plasma Physics Reports. 2003. Vol. 29, no. 5. Pp. 363-379.

7. *Skvortsova N.N., Batanov G.M., et al.* Structural plasma turbulence and anomalous non-Brownian diffusion. // Korolev V. Yu., Skvortsova N. N. Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence.- Modern Probability and Statistics. Leiden-Boston: VSP, 2006. Pp. 36-62.

8. *B. Ph. van Milligen, Sanchez R., Carreras B.* Probabilistic finite-size transport models for fusion: Anomalous transport and scaling laws // Physics of Plasma. 2003. Vol. 11. Pp. 2272-2285.

9. *Воройский Ф.С.* Информатика. Энциклопедический систематизированный словарь-справочник: введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах. — М.: Физматлит, 2006.

10. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control.- Berlin: Springer-Verlag, 1995.

11. *Борисов А. В.* Предварительный анализ распределения состояний специальных управляемых систем случайной структуры // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 1. С. 48-62.

12. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартигалов. — М.: Наука, 1984.

13. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.

14. *Di Masi G.B., Kitsul P.I.* Backward representation for nonstationary Markov processes with finite state space // System & Control Letters. 1994. Vol. 22. Pp. 445-450.

15. *Борисов А.В.* Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы I: оптимальное линейное оценивание // Автоматика и телемеханика. 2006. Т. 67. № 8. С. 51-76.

16. *Борисов А.В.* Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы II: оптимальное нелинейное оценивание // Автоматика и телемеханика. 2006. Т. 67. № 9. С. 120-141.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00508-а и № 07-02-00455-а) и программы ОИТВС РАН «Фундаментальные алгоритмы информационных технологий» (проект 1.5).

Работа выполнена в Институте проблем информатики Российской академии наук
Статья поступила в редакцию 15.12.2007