УДК531.55(15)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К КОМПЬЮТЕРНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ СВЯЗАННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ ОБЪЕКТОВ

Андрей Иванович КИБЗУН родился в 1951 г. в городе Хабаровске. Профессор МАИ. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области стохастического программирования. Автор более 200 научных работ.

Andrey I. KIBZUN, D.Sci, was born in 1951, in Khabarovsk. He is a Professor at the MAI. His research interests are in stochastic programming. He has published over 200 technical papers.

Владимир Львович МИРОШКИН родился в 1965 г. в городе Москве. Ведущий инженер кафедры «Теория вероятностей» Московского авиационного института (государственного технического университета), Автор двух научных работ.

Vladimir L. MIROSHKIN, was born in 1965, in Moscow. He is a Principal Engineer at the MAI. His research interests are in simulation of spacecraft dynamics. He has published 2 technical papers.

Предлагается подход к компьютерному моделированию движения группы связанных между собой объектов. Подход основан на представлении движения объектов как движения связанных с объектами систем координат. Для пересчета координат и описания связей между объектами вводятся отношения между системами координат. Для описания вводимых отношений между системами координат строятся древовидные структуры. С помощью древовидной структуры между системами координат установлены отношения порядка разной строгости. Приведен алгоритм построения древовидных структур для отношений между системами координат. Для двух введенных отношений между системами координат описано применение построенных древовидных структур.

1. Введение

Компьютерное моделирование, заключающееся в имитационном моделировании на ЭВМ сложных технических систем, является высокоэффективным и относительно низкозатратным методом исследования. Особую важность имитационное моделирование приобретает при исследовании таких сложных технических систем, для которых проведение натурного моделирования является трудоемкой и дорогостоящей процедурой. К таким сложным системам относится космическая техника. Применительно к космической технике как к сложной технической системе главной задачей моделирования является моделирование динамики движения космического аппарата (КА). Результаты моделирования динамики движения КА используются для оценки качества процесса вывода КА на орбиту, оптимальности компоновочных решений КА, а также для исследования движения КА в аварийных ситуациях. В ряде случаев, например на этапе эскизного проектирования или при наличии уникального КА, имитационное моделирование на ЭВМ является единственным способом исследования сложной системы.

В настоящее время один запуск ракеты-носителя (РН) часто используется для вывода на орбиту нескольких спутников. На маршевом участке полета движется один объект — орбитальный блок (ОБ). На этапе разделения ОБ изменяется количество движущихся объектов. Рассмотрим для определенности отделение спутников от РН. До отделения движется один орбитальный блок (ОБ), а после отделения — ОБ и одна ступень РН и несколько спутников. При этом физические параметры (масса, моменты инерции) ОБ, с одной стороны, и РН и отделившихся спутников, с другой стороны, должны быть согласованы. Аналогичная ситуация возникает при стыковке КА. Таким образом, приходим к рассмотрению задачи имитационного моделирования движения группы КА. При имитационном моделировании движения группы КА необходимо, во-первых, решить следующую задачу: разработать алгоритм формирования математической модели ОБ по математическим моделям РН и спутников при априорно неизвестном количестве совместно движущихся объектов. Кроме того, для описания движения КА применяются различные системы координат. В одной задаче может потребоваться использование нескольких систем координат для одного КА. Например, исходные данные задаются в так называемой строительной системе координат, поступательное движение — в инерциальной системе координат, угловое движение — в связанной системе координат, а результаты моделирования — в инерциальной системе координат. Таким образом, при имитационном моделировании движения группы КА необходимо, во-вторых, решить следующую задачу: разработать алгоритм пересчета координат из одной системы координат в другую.

В статье для решения возникающих при имитационном моделировании описанных двух задач предложен подход, в котором движение КА рассматривается как движение системы связанных между собой систем координат. Связи между системами координат описываются специальными древовидными структурами. Предложенный подход может быть использован при имитационном моделировании группы движущихся объектов, которые в процессе движения могут разделяться или объединятся.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу имитационного моделирования движения группы из $1 < M < \infty$ объектов. Пусть каждый объект из группы объектов является твердым телом.

Определение 1. Будем говорить, что два или более объекта образуют группу связанных объектов, если их положение друг относительно друга не меняется в процессе движения.

Определение 2. Совокупность объектов и групп связанных объектов для некоторого момента времени будем называть конфигурацией группы объектов.

Определение 3. Если в некоторый момент времени некоторая группа связанных объектов может распасться на группу объектов или группа объектов может образовать некоторую группу связанных объектов, то этот процесс будем называть изменением конфигурации группы объектов.

Будем полагать, что для имитационного моделирования заданы:

· количество движущихся объектов;

· параметры моделей движущихся объектов и систем координат, в которых они заданы [3];

· инерциальная система координат, относительно которой рассматривается движение;

· математические модели движения объектов в виде дифференциальных уравнений [3];

· математические модели действующих на объекты сил и моментов;

· системы координат, в которых должны быть представлены результаты моделирования.

Для задачи иммитационного моделирования требуется разработать:

1) структуры, описывающие конфигурацию группы объектов и связь между системами координат;

2) алгоритмы изменения конфигурации группы объектов и связей между системами координат.

Для решения поставленной задачи будем рассматривать движение объектов как движение систем координат. Движение систем координат рассматривается относительно некоторой выбранной системы координат, которая считается неподвижной, — абсолютной системы координат [2]. Выбор абсолютной системы координат зависит от рассматриваемого движения группы объектов. Будем считать, что абсолютная система координат задана.

Введем следующую классификацию систем координат:

· инерциальная система координат — система координат, движущаяся относительно абсолютной системы координат прямолинейно и равномерно;

· связанная с объектом (твердым телом) система координат — система координат, относительно которой рассматриваемый объект (твердое тело) неподвижен. Такую систему координат в дальнейшем будем называть связанной системой координат;

· свободная от объекта (твердого тела) система координат — система координат, не являющаяся связанной ни с каким объектом. Такую систему координат в дальнейшем будем называть свободной системой координат.

Определение 4. Будем говорить, что система координат C_1 является ведущей для системы координат C_2 и система координат C_2 является ведомой для системы координат C_1, если параметры движения системы координат C_2 относительно абсолютной системы координат могут быть определены через параметры движения системы координат C_1.

Можно сказать, что определение вводит между системами координат отношение «ведущая—ведомая».

Следующий пример иллюстрирует введенное в определении отношение «ведущая—ведомая» между системами координат. Пусть объект a_1, со связанной системой координат C_1 , и объект a_2, со связанной системой координат C_2 , образуют группу связанных объектов. Группа связанных объектов a_1, a_2 движется относительно некоторой абсолютной системы координат. Имитационное моделирование этой группы связанных объектов можно проводить двумя способами:

· Рассматривать движение систем координат C_1 и C_2 относительно абсолютной системы координат независимо друг от друга. Системы координат C_1 и C_2 являются ведомыми по отношению к абсолютной системе координат, а абсолютная система координат является ведущей по отношению к системам координат C_1 и C_2. В этом случае движение каждого объекта из группы связанных объектов моделируется самостоятельно. Для каждого из двух объектов надо решать системы дифференциальных уравнений движения на ЭВМ.

· Положение систем координат C_1 и C_2 друг относительно друга в процессе движения не меняется. Следовательно, для описания движения группы связанных объектов достаточно знать движение относительно абсолютной системы координат, например системы координат C_1. Движение относительно абсолютной системы координат системы координат C_2 можно получить из движения относительно абсолютной системы координат системы координат C_2 с помощью кинематических соотношений. Система координат C_1 является ведущей для системы координат C_2, а система координат C_2 ведомой для системы координат C_1. Моделируем движение группы связанных объектов как единого объекта со связанной системой координат C_1. В этом случае систему дифференциальных уравнений движения надо решать на ЭВМ только для одного объекта, что уменьшает время работы ЭВМ.

В приведенном выше примере введены два отношения «ведущая—ведомая», определяемые способом определения движения системы координат относительно абсолютной системы координат. Очевидно, что для второго отношения «ведущая—ведомая» между системами координат проведение имитационного моделирования группы связанных объектов требует меньше времени работы ЭВМ.

Для определения движения системы координат относительно абсолютной системы координат следует использовать то отношение «ведущая—ведомая» между системами координат, которое требует меньших затрат машинного времени.

Для описания отношения «ведущая—ведомая» между системами координат будем использовать древовидную структуру.

3. Древовидная структура и ее свойства

Определение 5. Ориентированный граф T с множеством вершин $V=\{v_0, v_1, v_2, ..., v_N\}$, $0<N<\infty$ будем называть древовидной структурой, если:

из каждой вершины в T исходит только одна дуга;

в T существует единственная вершина, из которой исходит петля;

при исключении петель в T и замене дуг в T на ребра T станет деревом.

Определение 6. Вершину в T, из которой исходит петля, будем называть корнем древовидной структуры T.

Утверждение 1. Для любой вершины $v_i \in V$ в T существует путь, в котором началом первой дуги является вершина v_i, а концом последней дуги является корень древовидной структуры T.

Пусть, для определенности, вершина v_0 — корень древовидной структуры T.

Если существует путь от вершины v_i к вершине v_j, то обозначим его $T(i,j)$.

Для определенности, путь $T(i,j)$ будем задавать упорядоченной последовательностью дуг. В пути $T(i,j)$ вершина v_i — начало первой дуги, а вершина v_j — конец последней дуги.

Следствие 1. Для любой вершины $v_i \in V$ кратчайший путь $T(i,0)$ — единственный.

Следствие 2. Для любой вершины $v_i \in V$ кратчайший путь $T(i,0)$ — простой элементарный путь.

Длину кратчайшего пути $T(i,0)$ будем обозначать $L(i)$.

Следствие 3. Для любой вершины $v_i \in V$: $L(i) \le N$.

Следствие 4. В T существует по крайней мере одна вершина, в которую не заходит ни одна дуга.

Утверждение 2. Пусть для вершин $v_i, v_j \in V$ в T существует путь $T(i,j)$. Тогда путь $T(i,0)$ состоит из пути $T(i,j)$ и пути $T(j,0)$:

$$T(i,0)=\{T(i,j), T(j,0)\}. \tag{1}$$

Определение 7. Пусть в вершину $v_i \in V$ в T не заходит ни одна дуга. Тогда множество вершин B_i, входящих в дуги кратчайшего пути $T(i,0)$, назовем ветвью древовидной структуры T.

Определение 8. Пусть B_i — ветвь в T. Пусть $v_{i_1}, v_{i_2} \in B_i$. Будем говорить, что v_{i_1} предшествует v_{i_2} ($v_{i_1} \le v_{i_2}$) в B_i, если $L(i_1) \le L(i_2)$.

Вершина v_1 предшествует вершине v_2 в T, если вершина v_1 «ближе» к корню древовидной структуры, чем вершина v_2.

Утверждение 3. Каждая ветвь древовидной структуры T — вполне упорядоченное множество.

Определение 9. Пусть $v_i, v_j \in V$. Будем говорить, что v_i предшествует $v_j (v_i \le v_j)$ в T, если $L(i) \le L(j)$.

Утверждение 4. Введенное в определении 9 отношение между вершинами древовидной структуры T задает отношение квазипорядка на множестве V вершин древовидной структуры T.

Определение 10. Пусть $v_i, v_j \in V$. Будем говорить, что между вершинами v_i и v_j задано отношение G $(v_i G v_j)$ в T, если $L(i) = L(j)$.

Утверждение 5. Введенное в определении 10 отношение между вершинами древовидной структуры T задает отношение эквивалентности на множестве V вершин древовидной структуры T.

Определение 11. Пусть $V_l \subset V$. Пусть для любого $v_i \in V_l$ выполнено $L(i) = l$. Тогда множество V_l будем называть множеством уровня l древовидной структуры T.

Следствие 5. Множество уровня древовидной структуры является классом эквивалентности по отношению эквивалентности из определения 10.

4. Алгоритм решения задачи

4.1. Применение древовидной структуры для описания отношения «ведущая—ведомая» между системами координат

Древовидными структурами систем координат будем моделировать конфигурацию группы объектов и связи между системами координат, а созданием, уничтожением и изменением древовидных структур будем моделировать изменение конфигурации группы объектов и связей между системами координат.

Для решения поставленных выше задач нам потребуются два отношения «ведущая—ведомая» между системами координат:

1. Отношение «ведущая—ведомая» между системами координат, порождаемое задачей пересчета координат заданного вектора из одной системы координат в другую. Этому отношению «ведущая—ведомая» присвоим номер $l = 1$;

2. Отношение «ведущая—ведомая» между системами координат, порождаемое вхождением объекта, для которого система координат является связанной, в группу связанных объектов. Этому отношению «ведущая—ведомая» между системами координат присвоим номер $l = 2$.

Чтобы различать системы координат, перенумеруем их. Номер присвоим абсолютной системе координат. Систему координат будем обозначать C_j, где $j = \overline{0, N}$.

Для каждой системы координат C_j зададим список номеров систем координат, для которых система координат C_j является «ведомой». Пусть система координат C_j является «ведомой» по отношению l к системе координат C_{i_l}. Тогда номер i_l добавим в список номеров систем координат, для которых система координат C_j является «ведомой».

По определению , система координат C_j будет корнем древовидной структуры по отношению l, если для системы координат C_j выполняется равенство $i_l = j$.

Заметим, что для отношения «ведущая—ведомая» может быть несколько древовидных структур.

Для отношений 1 и 2 требуется построить древовидные структуры T^1 и T^2, описывающие связи между системами координат по этим отношениям. На основе разработанных древовидных структур T^1 и T^2 требуется разработать алгоритм перехода между системами координат и алгоритм изменения конфигурации группы объектов.

Опишем алгоритм построения древовидных структур для отношения «ведущая—ведомая». Не ограничивая общности рассуждений, будем рассматривать одну древовидную структуру для одного отношения «ведущая—ведомая».

1. Для отношения «ведущая—ведомая» l выберем систему координат, которая будет корнем древовидной структуры. Пусть корнем древовидной структуры будет система координат C_K. Для C_K выполняется равенство $i_l = K$.

2. Выберем те системы координат $C_i, i \ne K$, движение которых относительно абсолютной системы координат определяется через корень древовидной структуры C_K. Для таких систем координат значение $i_l = K$. Такие системы координат являются ве-

домыми к системе координат C_K по отношению *l*. Множество таких систем координат составляет множество уровня древовидной структуры по отношению *l*.

3. Выберем те системы координат, движение которых относительно абсолютной системы координат определяется через системы координат из множества уровня древовидной структуры по отношению *l*. Для таких систем координат значение i_l равно номеру той системы координат из множества уровня древовидной структуры, через которую определяется их движение относительно абсолютной системы координат. Множество таких систем координат составляет множество уровня древовидной структуры по отношению i_l. Любая система координат из множества уровня древовидной структуры является ведомой для некоторой системы координат из множества уровня древовидной структуры.

4. Выберем те системы координат, движения которых относительно абсолютной системы координат определяются через системы координат из множества уровня $k-1$ древовидной структуры по отношению *l*. Для таких систем координат значение равно номеру той системы координат из множества уровня $k-1$ древовидной структуры, через которую определяется их движение относительно абсолютной системы координат. Множество таких систем координат составляет множество уровня *k* древовидной структуры по отношению *l*. Любая система координат из множества уровня *k* древовидной структуры является ведомой для некоторой системы координат из множества уровня $k-1$ древовидной структуры.

5. Выполним пункт настоящего алгоритма последовательно для всех систем координат.

Из утверждения 1 следует, что для любой *j*-й ($j=\overline{0,N}$) системы координат C_j существует путь $T(j,K)$ от системы координат C_j к системе координат C_K, которая является корнем древовидной структуры. Из $T(j,K)$ очевидным способом составляется путь $T(K,j)$ от системы координат C_K к системе координат C_j.

Если требуется определить движение *j*-й системы координат относительно *i*-й, то по древовидной структуре надо составить путь от *j*-й системы координат к *i*-й системе координат.

Составим путь $T(j,i)$ от системы координат C_j к системе координат C_i. Для систем координат C_j и C_i существуют пути $T(j,K)$ и $T(i,K)$.

Из утверждения 3 и утверждения 4 следует, что пути $T(j,K)$ и $T(i,K)$ представимы в виде

$$T(j,K)=\{T(j,m),T(m,K)\},$$
$$T(i,K)=\{T(i,m),T(m,K)\}. \tag{2}$$

Таким образом, рассматриваемый путь $T(j,i)$ будет иметь вид

$$T(j,i)=\{T(j,m),T(m,i)\}. \tag{3}$$

4.2. Построение и применение древовидной структуры для отношения «ведущая—ведомая», порождаемого задачей пересчета координат

Как было сказано выше, отношение «ведущая—ведомая» 1 между системами координат порождается задачей пересчета координат из одной системы координат в другую. Так как движение объектов рассматривается относительно абсолютной системы координат, то древовидная структура T^1 для отношения «ведущая—ведомая» будет единственная. Древовидная структура T^1 строится по алгоритму построения древовидной структуры для отношений «ведущая—ведомая». Пусть точка O — начало системы отсчета. Тогда корнем древовидной структуры T^1 будет абсолютная система координат C_0. Системами координат из множества уровня 1 будут инерциальные системы координат, уровня 2 — связанные и свободные системы координат.

В качестве примера применения древовидной структуры T^1 рассмотрим задачу пересчета координат вектора ***r*** из системы координат C_j в систему координат C_i. С помощью древовидной структуры T^1 найдем матрицу перехода из системы координат C_j в систему координат C_i для систем координат с ортонормированными базисными векторами, образующими правую тройку. Пусть у системы координат C_j $i_1=k$. Введем матрицу $A(j,k)$ — матрицу перехода от системы координат C_j к системе координат C_k. Столбцами матрицы $A(j,k)$ являются базисные векторы системы координат C_j, координаты которых заданы в системе координат C_k

$$A(j,k)=(e_1^j,e_2^j,e_3^j). \quad (4)$$

С учетом (2) матрица перехода от C_j к C_m имеет вид

$$A(j,m)=\prod_{k\in T(j,m)} A(j_k,j_{k+1}). \quad (5)$$

Аналогично, с учетом (2) матрица перехода от C_i к C_m имеет вид

$$A(i,m)=\prod_{k\in T(i,m)} A(i_k,i_{k+1}). \quad (6)$$

С учетом (2), (3), (5) и (6) матрица перехода от C_j к C_i имеет вид

$$A(j,i)=A(j,m)\cdot A^T(i,m). \quad (7)$$

Путь $T(j,i)$ из (3) и матрицу перехода между системами координат $A(j,i)$ используем для пересчета координат вектора $r\in R^3$ из системы координат C_j в систему координат C_i. Из (3) получаем путь от C_j к C_i, а затем из (7) матрицу перехода $A(j,i)$. Тогда

$$r^{(i)}=A(j,i)\cdot r^{(j)}. \quad (8)$$

В (8) верхний индекс у вектора *r* означает номер системы координат, в которой записаны координаты вектора *r*.

4.3. Построение и применение древовидной структуры для отношения «ведущая-ведомая», порождаемого изменением конфигурации группы объектов

Как было сказано выше, отношение «ведущая—ведомая» между системами координат порождается задачей изменения конфигурации группы связанных объектов. Рассмотрим группу из $M_1, M_1\le M$ связанных объектов. Для каждого *j*-го объекта из группы связанных объектов существует связанная система координат C_j. Выберем некоторую свободную систему координат C_K и будем считать ее корнем древовидной структуры по отношению «ведущая—ведомая» для рассматриваемой группы связанных объектов. Для группы связанных объектов по алгоритму построения древовидной структуры для отношений «ведущая—ведомая» построим древовидную структуру T^2.

Моделирование на ЭВМ движения группы связанных объектов можно производить путем моделирования движения системы координат C_K, что существенно сокращает затраты вычислительных ресурсов по сравнению с моделированием движения каждой связанной системы координат из группы связанных объектов.

Древовидную структуру T^2 используем для моделирования изменения конфигурации группы связанных объектов. Рассмотрим группу связанных объектов G_1, описываемую древовидной структурой T_1^2 с корнем C_{K_1}, и группу связанных объектов G_2, описываемую древовидной структурой T_2^2 с корнем C_{K_2}. Моделирование движения группы связанных объектов G_1 производится путем моделирования движения корня C_{K_1}, а моделирование движения группы связанных объектов G_2 производится путем моделирования движения корня C_{K_2}.

В некоторый момент времени группы связанных объектов G_1 и G_2 объединяются в группу связанных объектов G_3. Выберем некоторую свободную систему координат C_{K_3}. В системах координат C_{K_1} и C_{K_2} положим $i_2=K_3$. В результате получим новую группу связанных объектов, описываемую древовидной структурой T_3^2 с корнем C_{K_3}.

В некоторый момент времени группа связанных объектов G_3 распадается на группы связанных объектов G_1 и G_2. Тогда в системе координат C_{K_1} положим $i_2=K_1$, а в системе координат C_{K_2} положим $i_2=K_2$. В результате получим группу связанных объектов G_1, описываемую древовидной структурой T_1^2, и группу связанных объектов G_2, описываемую древовидной структурой T_2^2.

Выводы

В статье движение групп связанных объектов рассмотрено как движение систем координат. Для описания связей между объектами (системами координат) введены отношения «ведущая—ведомая». Для описания отношения «ведущая—ведомая» использован ориентированный граф специального вида, названный древовидной структурой. Описаны свойства древовидной структуры, позволившие формализовать отношение «ведущая—ведомая» для систем координат. Предложен алгоритм построения древовидной структуры для систем координат.

Описано применение древовидных структур для двух типов отношения «ведущая—ведомая». Предложенный в статье подход к имитационному моделированию движения группы связанных между собой объектов может быть применен при объектно-ориентированном проектировании [1] программного обеспечения для компьютерного моделирования динамики движения КА на этапе разделения и стыковки.

Приложение

Доказательство утверждения 1. Из произвольной вершины $v_i \in V$ в T будем строить путь, последовательно добавляя дуги. Из определения 5 (п.3) следует, что в этом пути и, следовательно, в T не может быть контуров. Так как в T не может быть контуров, множество вершин V — конечно и из каждой вершины в T исходит только одна дуга, то при добавлении некоторой очередной дуги в путь в нем возникнет петля. Это означает, что в путь была добавлена дуга, началом которой является корень древовидной структуры T. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2. Допустим, что путь $T(i,j)$ не входит в путь $T(i,0)$. Тогда среди вершин, входящих в дуги из $T(i,j)$, существует вершина, из которой исходят две дуги. Но это противоречит определению 6. Следовательно, путь $T(i,j)$ входит в путь $T(i,0)$. Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 3. Пусть $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$ — вершины из некоторой ветви B_i в T. Тогда:

Рефлексивность. Так как $L(i_1) \le L(i_1)$, то $v_{i_1} \le v_{i_1}$.

Транзитивность. Пусть $v_{i_1} \le v_{i_2}$ и $v_{i_2} \le v_{i_3}$. Это означает, что $L(i_1) \le L(i_2)$ и $L(i_2) \le L(i_3)$. Следовательно, $L(i_1) = L(i_3)$. Следовательно, $v_{i_1} = v_{i_3}$.

Антисимметричность. Пусть $v_{i_1} \le v_{i_2}$ и $v_{i_2} \le v_{i_1}$. Это означает, что $L(i_1) \le L(i_2)$ и $L(i_2) \le L(i_1)$. Следовательно, $L(i_1) = L(i_2)$. Следовательно, $v_{i_1} = v_{i_2}$.

Пусть $v_{i_1} \ne v_{i_2}$. Тогда либо $L(i_1) < L(i_2)$, либо $L(i_2) < L(i_1)$. Следовательно, либо $v_{i_1} < v_{i_2}$, либо $v_{i_2} < v_{i_1}$.

Пусть $b_i \subseteq B_i, b_i \ne \varnothing$. Тогда существуют $v_{i_1}, v_{i_2} \in b_i$ такие, что существует кратчайший путь $T(i_1, i_2)$, дуги которого содержат все вершины из b_i. Следовательно, для любого $v_{i_3} \in b_i, v_{i_3} \ne v_{i_1}$ выполняется $v_{i_1} < v_{i_3}$. Следовательно, в b_i существует наименьший элемент.

Доказательство утверждения 4. Пусть $v_i, v_j, v_k \in V$. Тогда

Рефлексивность. Так, как $L(i) \le L(i)$, то $v_i \le v_i$.

Транзитивность. Пусть $v_i \le v_j$ и $v_j \le v_k$. Это означает, что $L(i) \le L(j)$ и $L(j) \le L(k)$. Следовательно, $L(i) \le L(k)$. Следовательно, $v_i \le v_k$.

Антисимметричность не выполняется, так как вершины могут принадлежать разным ветвям древовидной структуры T.

Доказательство утверждения 5. Пусть $v_i, v_j, v_k \in V$. Тогда

Рефлексивность. Так как выполняется $L(i) = L(i)$, то выполняется $v_i G v_i$.

Транзитивность. Пусть $v_i G v_j$ и $v_j G v_k$. Это означает, что $L(i) = L(j)$ и $L(j) = L(k)$. Следовательно, $L(i) = L(k)$. Следовательно, $v_i G v_k$.

Симметричность. Пусть $v_i G v_j$. Это означает, что $L(i) = L(j)$. Следовательно, $L(j) = L(i)$. Следовательно, $v_j G v_i$.

Summary

An approach is suggested to simulate a motion for a group of connected objects. This approach is based on representation of motion for some object as its coordinate system motion. Tree-type structures are constructed to describe relations between coordinate systems associated with the objects incorporated into the group. The tree structure specifies some order on the set of coordinate systems to simulate interconnections between them. An algorithm is presented to generate tree structures needed to describe relations for coordinate systems. An application of the tree structures are demonstrated to model two types of interconnections between coordinate systems.

Библиографический список

1. *Буч Г.* Объектно-Ориентированное Проектирование. С примерами применения. — М.: Конкорд, 1992.

2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990.

3. *Kibzun A.I., Shlluinsky Yu.T., Kan Yu.S., Miroshkin V.L.* Probabilistic Analysis of Spacecraft Separation from the Launch-Vehicle // Zeszyty Navkowe Politechniki Rzeszowskiey. Mechanica. 1998. z.51. №168.

Московский авиационный институт

Статья поступила в редакцию 15.12.2007