

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТОЛЁТА НА РЕЖИМЕ РАСКРУТКИ НЕСУЩЕГО ВИНТА НА ЗЕМЛЕ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЛОПАСТЕЙ

Николаев Е.И.^{1*}, Пантюхин К.Н.^{2**}

¹ Казанский вертолетный завод,
ул. Тэцевская, 14, Казань, 420085, Россия

² Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
КНИТУ-КАИ, ул. Карла Маркса 10, Казань, 420111, Россия

* e-mail: nikolaev_ei@kazanhelicopters.com

** e-mail: Kostyapanty@gmail.com

Приведены результаты исследования динамической неустойчивости вертолёт при раскрутке несущего винта на земле («земного» резонанса) с учётом упругости лопастей несущего винта вертолёт с упругой втулкой (вертолёт АНСАТ ПАО «Казанский вертолётный завод»). Результаты исследования являются новыми по сравнению с результатами, полученными традиционным методом решения задачи, при котором исследуется отдельно каждая степень свободы вертолёт. Для решения задачи «земного» резонанса в предлагаемой постановке выведены дифференциальные уравнения движения вертолёт с учётом шести степеней свободы корпуса и трех степеней свободы лопастей на упругой втулке. Для полученной системы дифференциальных уравнений построена система характеристических алгебраических уравнений, по характеру корней которых определяются зоны неустойчивости движений лопастей и вертолёт в зависимости от угловой скорости вращения несущего винта. Проведён сравнительный анализ положения зон неустойчивости, полученных для винта с жёсткими и упругими лопастями. Представлено сравнение с результатами расчётов по классической схеме Колемана.

Ключевые слова: земной резонанс, лопасть, собственные частоты и формы колебаний.

Уравнения движения вертолёт

Рассмотрим одновинтовой вертолёт. Введем неподвижно связанную с землей систему координат $Ox_g y_g z_g$. В этой системе координат центр масс вертолёт имеет координаты x_c, y_c, z_c . В центре масс вертолёт поместим систему координат $Ox_c y_c z_c$, оси которой при движении вертолёт остаются параллельными осям неподвижной системы координат. В центре масс вертолёт поместим третью систему координат $Ox_{cv} y_{cv} z_{cv}$, неподвижно связанную с корпусом вертолёт (рис. 1).

Для вывода уравнений движения корпуса вертолёт запишем выражение для кинетической энергии. Рассмотрим вертолёт без лопастей. Кинетическая энергия вертолёт равна сумме кинетической энергии поступательного перемещения всей массы корпуса вертолёт, помещенной в его центр масс, и кинетической энергии вращательного движения корпуса вертолёт вокруг центра масс:

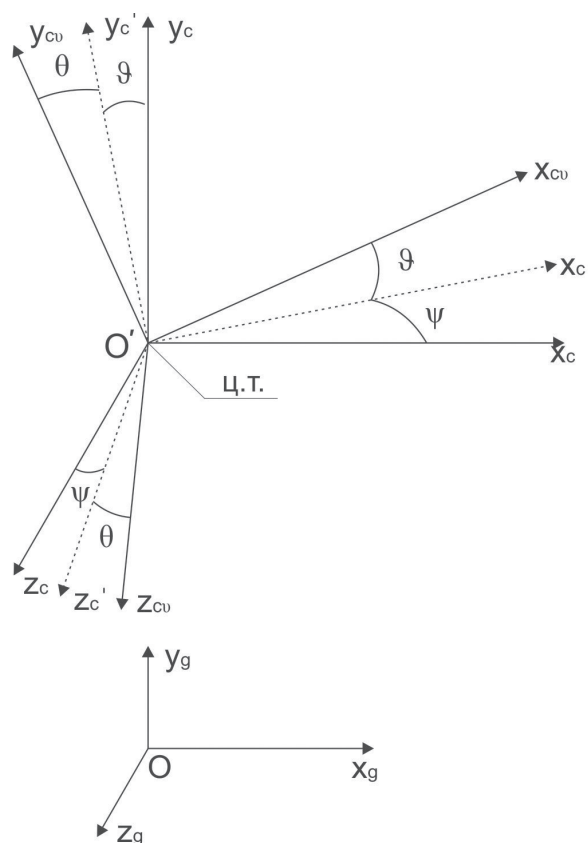


Рис. 1. Оси координат вертолёт

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} (I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2 + 2I_{yz} qr + 2I_{xz} pr + 2I_{xy} pq),$$

где p, q, r — проекции угловой скорости вращательного движения вертолѐта на оси земной системы координат $Ox_g y_g z_g$; $I_x, I_y, I_z, I_{yz}, I_{xz}, I_{xy}$ — моменты инерции вертолѐта относительно осей $Ox_{cv} y_{cv} z_{cv}$, связанных с вертолѐтом.

Поскольку плоскость $Ox_{cv} y_{cv}$ является плоскостью симметрии для подобного типов вертолѐтов, примем $I_{yz} = 0$ и $I_{xz} = 0$. Тогда выражение для кинетической энергии будет иметь вид

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} (I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2 + 2I_{xy} pq).$$

Рассмотрим малые колебания вертолѐта относительно центра масс, под которыми будем понимать такое движение вертолѐта, при котором в выражении для кинетической энергии можно пренебречь членами уравнения выше второго порядка малости. При этом приняты следующие допущения:

- пренебрегаем перемещением сечения лопасти по оси z , считая его малой величиной;
- угловое ускорение при раскрутке несущего винта не учитываем ввиду его малости;
- для перехода от неподвижной системы в связанную систему координат вертолѐта будем использовать матрицу перехода с точностью до величин первого порядка малости:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\vartheta & \phi \\ \vartheta & 1 & -\theta \\ -\phi & \theta & 1 \end{bmatrix},$$

откуда легко установить, что $p = \dot{\theta}$, $q = \dot{\phi}$, $r = \dot{\vartheta}$.

Таким образом, выражение для кинетической энергии корпуса вертолѐта примет вид

$$T_{\Phi} = \frac{1}{2} m_{\Phi} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \frac{1}{2} (I_x \dot{\theta}^2 + I_y \dot{\phi}^2 + I_z \dot{\vartheta}^2 + 2I_{xy} \dot{\theta} \dot{\phi}).$$

Полная кинетическая энергия вертолѐта равна сумме кинетической энергии движения корпуса и кинетической энергии движения лопастей:

$$T = T_{\Phi} + \sum_{j=1}^k T_{lj},$$

где j — номер лопасти; k — количество лопастей.

Найдем выражения для кинетической энергии лопасти T_{lj} . Перейдем в систему координат неподвижной втулки $Ox_0 y_0 z_0$, начало которой лежит на оси Oy_{cv} на расстоянии e_0 от центра масс вертолѐта.

Кинетическая энергия элемента dm_l j -й лопасти равна

$$dT_l = \left(\frac{1}{2} (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 \right) dm_l,$$

где $\dot{x}_g, \dot{y}_g, \dot{z}_g$ — составляющие скорости элемента в неподвижной системе координат.

Параметры движения элемента упругой лопасти удобно вычислять в главных осях сечения лопасти, но, чтобы найти кинетическую энергию всех лопастей, необходимы скорости элемента в неподвижной системе координат. Для этого требуется перейти от главных осей сечения лопасти последовательными шагами к неподвижной системе координат.

Рассмотрим сечение лопасти, перпендикулярное оси жѐсткости и пересекающее её в точке, имеющей в осях лопасти координаты x, y, z . Координаты x_2, y_2, z_2 этой же точки лопасти, имеющей в главных осях сечения координаты x_3, y_3, z_3 (рис. 2), находим, используя матрицу перехода A :

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + [A] \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \Theta) & -\sin(\varphi + \Theta) & 0 \\ \sin(\varphi + \Theta) & \cos(\varphi + \Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где Θ и φ — соответственно упругий и установочный угол поворота сечения лопасти.

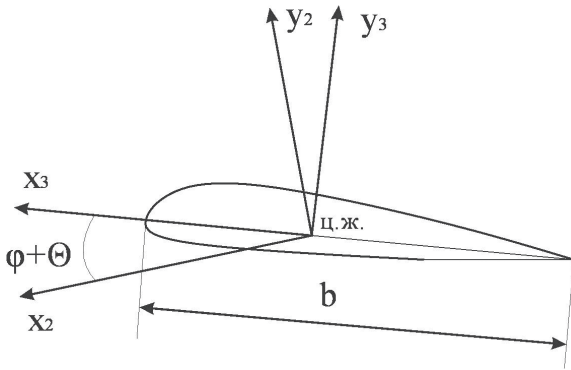


Рис. 2. Связанная с сечением лопасти система координат

Используя матрицу B , переходим во вращающуюся систему координат лопасти $Ox_l y_l z_l$:

$$\begin{Bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & y' \\ -x' & -y' & 1 \end{bmatrix}.$$

От вращающейся системы координат лопасти переходим во вращающуюся систему координат втулки $Ox_1 y_1 z_1$ за счет перемещений вдоль оси z_l

на l_2 и вдоль оси x_l на l_0 . Далее, используя матрицу C , переходим в невращающуюся систему координат втулки несущего винта $Ox_0 y_0 z_0$ (рис. 3):

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sin(\psi) & 0 & -\cos(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \end{bmatrix}.$$

Переходим в оси $Ox_{cv} y_{cv} z_{cv}$, неподвижно связанные с вертолётом, перемещаясь вдоль оси Oy_{cv} на расстояние e_0 . Перемещения в неподвижной системе координат с отбрасыванием членов выше второго порядка малости имеем при использовании матрицы перехода D :

$$\begin{Bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} x_{cv} \\ y_{cv} \\ z_{cv} \end{Bmatrix}.$$

Дифференцируя полученные соотношения, найдем составляющие скорости элемента лопасти в неподвижной системе координат:

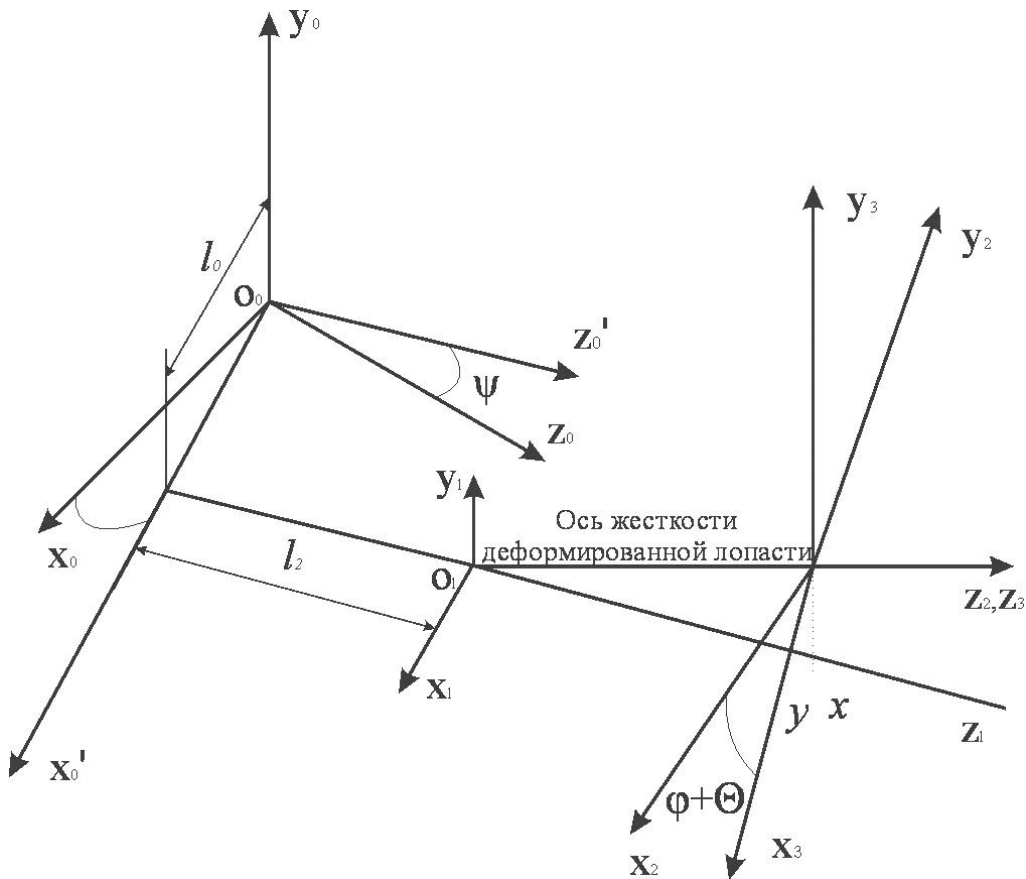


Рис. 3. Системы координат винта

$$\begin{aligned} \dot{x}_g = & (\sin(\psi)\sin(\varphi)y_3\omega - \sin(\psi)\cos(\varphi)x_3\omega + \cos(\psi)z_3\omega) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial r} X - (\sin(\psi)\sin(\varphi)x_3\omega + \sin(\psi)\cos(\varphi)y_3\omega) \frac{\partial}{\partial r} Y + \\ & + \phi(-\sin(\psi)l_0\omega + \cos(\psi)z_3\omega + \sin(\psi)\sin(\varphi)y_3\omega + \\ & + \cos(\psi)l_2\omega - \sin(\psi)\cos(\varphi)x_3\omega) + \Theta(-\cos(\psi) \times \\ & \times \sin(\varphi)x_3\omega - \cos(\psi)\cos(\varphi)y_3\omega) - \cos(\psi)\sin(\varphi)y_3\omega + \\ & + \sin(\psi)z_3\omega + \sin(\psi)Z\omega + \cos(\psi)X\omega + \cos(\psi) \times \\ & \times \cos(\varphi)x_3\omega + \cos(\psi)l_0\omega + \sin(\psi)l_2\omega + \frac{\partial}{\partial t} x_c + \\ & + (\sin(\psi)l_2 + \cos(\psi)l_0 - \cos(\psi)\sin(\varphi)y_3 + \\ & + \cos(\psi)\cos(\varphi)x_3 + \sin(\psi)z_3) \frac{\partial}{\partial t} \phi - \cos(\psi) \frac{\partial}{\partial t} Z + \\ & + (-\sin(\psi)\cos(\varphi)y_3 - \sin(\psi)\sin(\varphi)x_3) \frac{\partial}{\partial t} \Theta + \\ & + \sin(\psi) \frac{\partial}{\partial t} X + (-\cos(\varphi)y_3 - \cos(\varphi)x_3) \frac{\partial}{\partial t} \varphi; \\ \dot{y}_g = & (-\sin(\psi)\cos(\varphi)x_3\omega + \cos(\psi)l_2\omega + \sin(\psi)\sin(\varphi) \times \\ & \times y_3\omega + \cos(\psi)z_3\omega - \sin(\psi)l_0\omega) \theta + (-\cos(\psi)\cos(\varphi) \times \\ & \times x_3\omega - \sin(\psi)z_3\omega - \cos(\psi)l_0\omega - \sin(\psi)l_2\omega + \cos(\psi) \times \\ & \times \sin(\varphi)y_3\omega) \vartheta + \frac{\partial}{\partial t} y_c - \sin(\varphi)y_3 \frac{\partial}{\partial t} \varphi + (\sin(\psi)l_2 + \\ & + \cos(\psi)l_0 - \cos(\psi)\sin(\varphi)y_3 + \sin(\psi)z_3) \frac{\partial}{\partial t} \theta + \\ & + (-\sin(\psi)l_0 + \sin(\psi)\sin(\varphi)y_3 + \cos(\psi)z_3 + \cos(\psi)l_2 - \\ & - \sin(\psi)\cos(\varphi)x_3) \frac{\partial}{\partial t} \vartheta + \cos(\psi)\cos(\varphi)x_3 \frac{\partial}{\partial t} \theta + \\ & + \cos(\varphi)x_3 \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \cos(\varphi)x_3 \frac{\partial}{\partial t} \Theta; \\ \dot{z}_g = & -\cos(\psi)\sin(\varphi)x_3 \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \cos(\psi)\cos(\varphi)y_3 \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \\ & + \sin(\psi)\cos(\varphi)x_3 \frac{\partial}{\partial t} \phi + \sin(\psi) \frac{\partial}{\partial t} Z - \sin(\psi)l_0\omega + \\ & + \cos(\psi)z_3\omega + \cos(\psi)l_2\omega - \sin(\psi)X\omega + \cos(\psi)Z\omega + \\ & + \sin(\psi)\sin(\varphi)\Theta\omega + \sin(\psi)\cos(\varphi)\Theta\omega + \cos(\psi)\sin(\varphi) \times \\ & \times x_3\omega \frac{\partial}{\partial r} Y + \cos(\psi)\cos(\varphi)y_3\omega \frac{\partial}{\partial r} Y + \cos(\psi)\cos(\varphi) \times \\ & \times x_3\omega\phi + \cos(\psi)\cos(\varphi)x_3\omega \frac{\partial}{\partial r} X + (\cos(\psi)l_0\omega + \\ & + \sin(\psi)z_3\omega + \sin(\psi)l_2\omega - \cos(\psi)\sin(\varphi)y_3\omega)\phi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (\sin(\psi)z_3\omega - \cos(\psi)\sin(\varphi)y_3\omega) \frac{\partial}{\partial r} X + \sin(\psi)\sin(\varphi) \times \\ & \times y_3\omega + \frac{\partial}{\partial t} z_c - \cos(\psi)\sin(\varphi)x_3 \frac{\partial}{\partial t} \Theta - \cos(\psi)\cos(\varphi)y_3 \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial t} \Theta + \cos(\psi) \frac{\partial}{\partial t} X - \cos(\psi)y_3 \frac{\partial}{\partial t} \theta + (-x_3 \sin(\varphi) - e_0) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial t} \theta + (-\cos(\psi)z_3 + \sin(\psi)l_0 - \sin(\psi)\sin(\varphi)y_3 - \\ & - \cos(\psi)l_2) \frac{\partial}{\partial t} \phi - \sin(\psi)\cos(\varphi)x_3\omega. \end{aligned}$$

Здесь и далее для вывода уравнений используется математический пакет символьного вычисления Maple, применение которого облегчает процесс вывода и позволяет исключить механические ошибки. Для этих целей можно использовать другие математические пакеты: MathCAD, Mathematica и т.д.

Анализ динамической устойчивости вертолёта на земле

Для системы «вертолёт с лопастями» составим уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (T) - \frac{\partial}{\partial q} (T) + \frac{\partial}{\partial q} (U) = Q,$$

где $q = x_c, y_c, z_c, \theta, \phi, \vartheta$ — искомые функции для корпуса вертолёта;

$T = T_\phi + \sum_{i=1}^k T_{\pi}$, T_ϕ — кинетическая энергия корпуса вертолёта, T_{π} — кинетическая энергия лопасти;

$U = U_\phi + \sum_{i=1}^k U_{\pi}$, U_ϕ — потенциальная энергия корпуса вертолёта;

U_{π} — потенциальная энергия лопасти; Q — обобщенные силы, действующие на вертолёт.

В результате получаем шесть дифференциальных уравнений, описывающих движение вертолёта.

Для лопасти уравнение Лагранжа выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\sum_{i=1}^k T_{\pi} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{i=1}^k T_{\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{i=1}^k U_{\pi} \right) = Q_{\pi},$$

где $q = x, y, z, \Theta$ — функции перемещений лопастей и угла закручивания; Q_{π} — обобщенные силы, действующие на лопасть; U_{π} — потенциальная энергия лопасти в поле центробежных сил.

При изгибе в плоскости диска

$$U_x = \frac{1}{2} \int_0^R EJ_x \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \right)^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^R N \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 dr;$$

при изгибе в направлении, перпендикулярном плоскости диска,

$$U_y = \frac{1}{2} \int_0^R EJ_y \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right)^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^R N \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 dr;$$

при закручивании лопасти относительно оси жесткости

$$U_\Theta = -\frac{1}{2} \int_0^R \Theta \frac{\partial}{\partial r} \left[GJ_p \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right] dr.$$

Для жёсткой лопасти потенциальная энергия будет выглядеть следующим образом:

$$U_x = \left(\frac{1}{2} c_\xi + \frac{1}{2} Nr \right) \xi^2;$$

$$U_y = \left(\frac{1}{2} c_\beta + \frac{1}{2} Nr \right) \beta^2; \quad U_\Theta = \frac{1}{2} c_\Theta \Theta^2,$$

где c_ξ, c_β, c_Θ — жёсткости в узле крепления к втулке несущего винта; $N = \omega^2 \int_r^R m_{\text{л}} r dr$ — центробежная сила.

Потенциальная энергия корпуса вертолёта зависит только от жёсткостных характеристик посадочных устройств вертолёта, которые, в свою очередь, зависят от их конструктивных особенностей:

$$\{U_\Phi\} = \frac{1}{2} [K] \cdot \{W\};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{yx} & k_{zx} & k_{\varphi_x x} & k_{\varphi_y x} & k_{\varphi_z x} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{zy} & k_{\varphi_x y} & k_{\varphi_y y} & k_{\varphi_z y} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} & k_{\varphi_x z} & k_{\varphi_y z} & k_{\varphi_z z} \\ k_{x\varphi_x} & k_{y\varphi_x} & k_{z\varphi_x} & k_{\varphi_x \varphi_x} & k_{\varphi_y \varphi_x} & k_{\varphi_z \varphi_x} \\ k_{x\varphi_y} & k_{y\varphi_y} & k_{z\varphi_y} & k_{\varphi_x \varphi_y} & k_{\varphi_y \varphi_y} & k_{\varphi_z \varphi_y} \\ k_{x\varphi_z} & k_{y\varphi_z} & k_{z\varphi_z} & k_{\varphi_x \varphi_z} & k_{\varphi_y \varphi_z} & k_{\varphi_z \varphi_z} \end{bmatrix};$$

$$\{W\} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \\ \theta^2 \\ \varphi^2 \\ \vartheta^2 \end{bmatrix},$$

где $[K]$ — матрица жёсткости вертолёта на шасси.

В рассматриваемом случае аэродинамические силы, действующие на вертолёт и лопасти несущего винта, не учитываются, поэтому выражения для всех внешних обобщенных сил в уравнениях Лагранжа приравняются нулю.

Уравнения движения лопасти на упругой втулке моделируем для двух вариантов:

— колебания абсолютно жёстких лопастей за счёт податливости упругого элемента в эквивалентном шарнире с пружиной на кручение: $x = \xi r, y = \beta r, z = r;$

— колебания упругих лопастей с учетом протяженного по радиусу упругого элемента, которые представим в виде разложения по собственным формам по методу Галеркина:

$$x = \sum_{j=1}^n f_{1,j}(r) q_{1,j}(t);$$

$$y = \sum_{j=1}^n f_{2,j}(r) q_{2,j}(t);$$

$$\Theta = \sum_{j=1}^n f_{3,j}(r) q_{3,j}(t),$$

где n — количество гармоник; f — известные формы колебаний, соответствующие гармонике и степени свободы лопасти; q — обобщенная координата при соответствующей гармонике.

Известно, что частота колебаний шарнирной лопасти относительно горизонтального шарнира приблизительно равна частоте вращения несущего винта, а относительно вертикального шарнира она зависит от разности вертикального шарнира и достаточна мала. Однако для несущего винта с упругой втулкой (например, упругая втулка вертолёта АНСАТ, рис. 4) эта закономерность нарушается: невращающаяся лопасть имеет собственную частоту в плоскости взмаха около 6.5 Гц, в плоскости вращения — около 4.3 Гц. Данное обстоятельство влияет не только на характеристики устойчивости вертолёта, но и на применяемые для расчёта математические модели лопастей.

Методика исследования устойчивости основана на выводе характеристической системы алгебраических уравнений, получаемых разложением обобщенных координат в ряд Фурье:

$$q_i(t) = \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{n=1}^w (a_{i,n} \cos(n\omega t) + b_{i,n} \sin(n\omega t)),$$

где w — количество гармоник.



Рис. 4. Вертолёт АНСАТ с упругой втулкой несущего винта

Подставив в уравнения движения вертолёта выражения для обобщенных координат в виде разложения в ряд, получим уравнения с неизвестными коэффициентами:

$$\{F_i(a_{i,0}, a_{i,n}, b_{i,n})\} = 0.$$

В свою очередь, считая каждое дифференциальное уравнение периодической функцией с периодом $T = 2\pi/\omega$, разлагаем его в ряд Фурье следующего вида:

$$F_i(t) = \frac{1}{2}z_{i,0} + \sum_{n=1}^w (zc_{i,n} \cos(n\omega t) + zs_{i,n} \sin(n\omega t)) = 0,$$

$$\text{где } z_{i,0} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_i dt = 0; \quad zc_{i,n} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_i \cos(\omega t) dt = 0;$$

$$zs_{i,n} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F_i \sin(\omega t) dt = 0.$$

В итоге после подстановки получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд. Полученную систему алгебраических уравнений можно представить в матричном виде:

$$[\Phi] \begin{Bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,n} \\ b_{i,n} \end{Bmatrix} = 0,$$

где $[\Phi]$ — характеристическая матрица, которая характеризует колебательное движение вертолёта целиком на земле независимо от того, с жёсткими он или с упругими лопастями [5].

При переходе от жёсткой к упругой лопасти меняется размерность системы, но не алгоритм расчёта.

Уравнения движения вертолёта были последовательно выведены с использованием программного пакета символьного вычисления Maple до получения характеристической системы алгебраических уравнений. Для преобразования символьной характеристической матрицы в численную форму для вычисления корней характеристического уравнения используется программа, написанная в математическом пакете Matlab.

Формирование характеристической матрицы для вертолёта с жёсткими лопастями (размерность матрицы 54×54) занимает в Maple не более двух минут, а для вертолёта с упругими лопастями (размерность матрицы 126×126) при учёте трёх собственных форм колебаний лопасти (в представленном расчётном случае) — около 4 часов. Расчёты в Matlab занимают несколько минут.

Для решения рассматриваемой задачи нет необходимости учитывать крутильные колебания лопасти, но для использования в дальнейшей работе их решено сохранить, невзирая на некоторое увеличение порядка системы разрешающих уравнений [6, 7].

Результаты расчётов

В качестве исходных данных в расчётах использовались массово-инерционные характеристики вертолёта АНСАТ, жёсткостные характеристики его взлётно-посадочных устройств и жесткостные характеристики упругой втулки. Отдельно рассчитывались формы совместных изгибно-крутильных колебаний упругой лопасти вместе с упругим элементом втулки несущего винта. В расчётах использованы первые три формы колебаний лопастей.

В данной постановке динамическую неустойчивость вертолёта определяем знак мнимой части собственного значения характеристической матрицы. Действительная часть собственного значения характеристической матрицы показывает динамику изменения собственных частот колебаний вертолёта и лопастей при изменении частоты вращения несущего винта на режиме раскрутки.

В дополнение к разработанной программе расчёта для сравнения результатов с общепринятым методом, разработана программа, в которой использован метод разделения движения вертолёта на составляющие (метод Колемана).

Расчёты, выполненные методом Колемана, показали (рис. 5), что на штатном ползковом шасси все четыре области неустойчивости, соответствующие четырём собственным формам и частотам колебаний вертолёта, находятся за пределом рабочей частоты вращения несущего винта (100%).

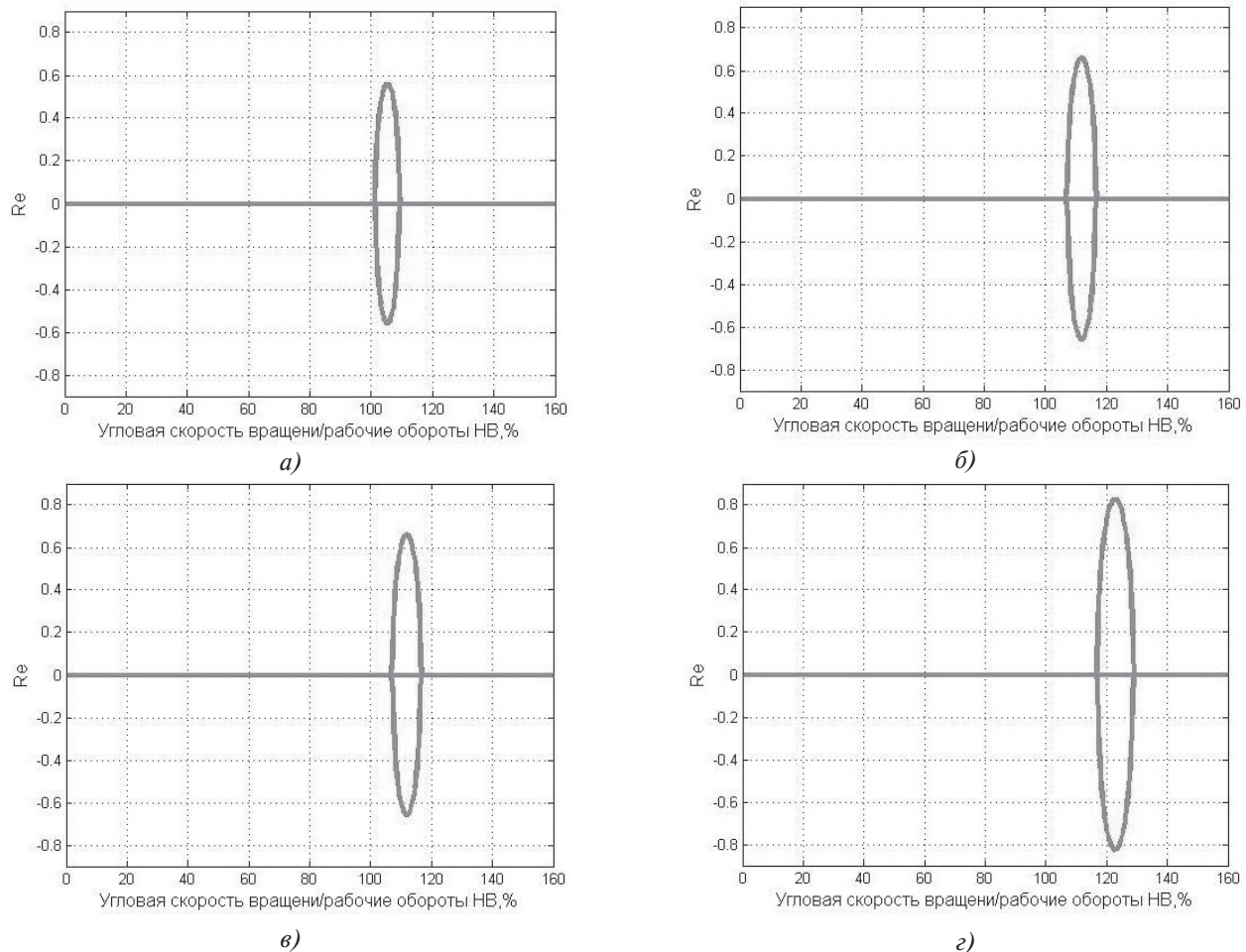


Рис. 5. Зоны неустойчивого поведения вертолёта на земле, рассчитанного по методу Колемана: *a* — первая собственная частота, преимущественно влияющая на крутильные колебания относительно вертикальной оси; *б* — вторая собственная частота, преимущественно влияющая на крутильные колебания относительно поперечной оси; *в* — третья собственная частота, преимущественно влияющая на колебания вдоль продольной оси; *г* — четвертая собственная частота, преимущественно влияющая на крутильные колебания относительно продольной оси

В расчётной модели с жёсткими лопастями в результате моделирования совместного пространственного движения вертолёта выявлены «новые» зоны неустойчивости и основная зона, оказывающая наибольшее влияние на резонансные колебания вертолёта. Небольшая зона в области $50\% \omega_{\text{НВ}}$ ($\omega_{\text{НВ}}$ — рабочая частота вращения несущего винта) не опасна, так как несущий винт находится в этой зоне непродолжительное время. Продолжительная зона, начинающаяся от $130\% \omega_{\text{НВ}}$, где амплитуда колебаний резко увеличивается, что может привести к разбалансу несущего винта (рис. 6), находится далеко за пределом рабочей частоты вращения.

В расчётной модели вертолёта с упругими лопастями общая картина схожа с моделью винта с жёсткими лопастями, но появляются дополнительные зоны, благодаря учёту собственных форм колебания лопастей. Расчёт выявил четыре опасные

зоны: $23\% \omega_{\text{НВ}}$, $58\% \omega_{\text{НВ}}$, $86\% \omega_{\text{НВ}}$ и свыше $130\% \omega_{\text{НВ}}$ (рис. 7).

При решении задачи в полной постановке (по модели вертолёта с жёсткими лопастями или с упругими лопастями) получены зоны неустойчивости на неопасной для несущего винта частоте вращения ($50\% \omega_{\text{НВ}}$ для жесткой модели лопастей и 23% , 58% и $86\% \omega_{\text{НВ}}$ для упругой модели лопастей). В обоих случаях опасные зоны существенно сдвигаются вправо по сравнению с классическим методом Колемана. Это связано с комплексным учётом взаимовлияния собственных колебаний вертолёта и лопастей в целом (рис. 6 и 7).

Для исследования других возможных конфигураций конструкции вертолёта необходимо провести соответствующее моделирование и сделать выводы по зонам возможного резонанса.

Для вертолёта АНСАТ с ползковым шасси демпфирование основания, безусловно, зависит от

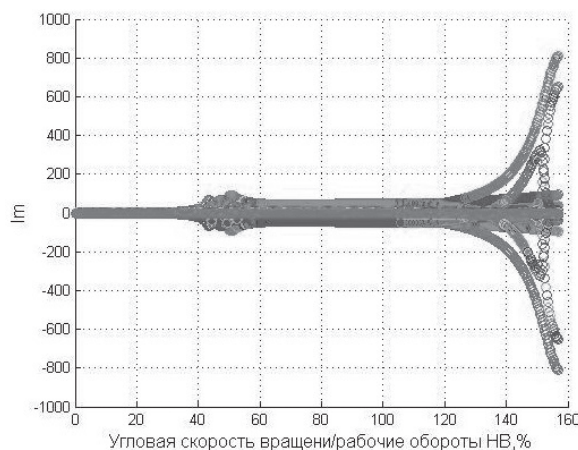
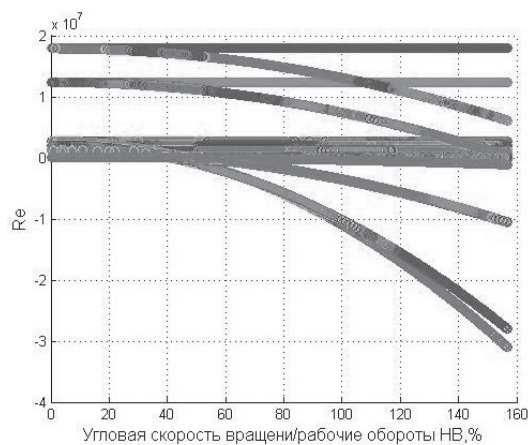


Рис. 6. Область неустойчивого движения вертолёта с жёсткими лопастями

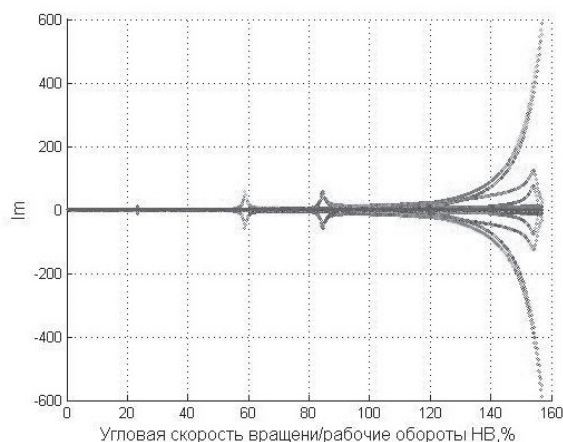
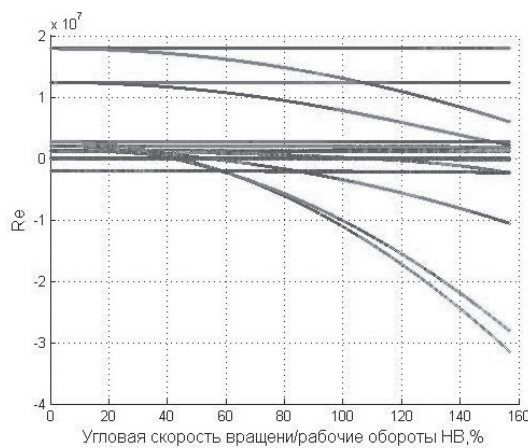


Рис. 7. Области неустойчивого движения вертолёта с упругими лопастями

коэффициента трения полозков о взлетно-посадочную поверхность (бетон, асфальт, снег, лёд), поэтому расположение зон резонанса будет зависеть и от состояния поверхности контакта. Может потребоваться установка демпферов на места крепления полозков к корпусу вертолёта. В данной модели принято, что шасси относительно ВПП не проскальзывает, что является, как и влияние аэродинамических сил на характеристики земного резонанса, предметом дальнейших исследований.

Выводы

Разработана математическая модель колебаний вертолёта на упругом основании с учётом первых трёх совместных форм колебаний лопастей несущего винта.

Разработан алгоритм получения характеристической матрицы, основанный на разложении дифференциальных уравнений колебаний вертолёта и лопастей несущего винта в ряд Фурье.

Написан и отлажен пакет программ в средах программирования Maple и Matlab, который позволяет определять зоны динамической неустойчивости вертолёта на земле.

Проведено сравнение результатов с общепринятым методом расчёта на «земной» резонанс Р. Колемана [4], которое показывало удовлетворительную сходимость.

Расчёты разработанной методики показывают, что у вертолёта АНСАТ на штатном шасси нет областей неустойчивости в рабочей зоне (65–100% $\omega_{НВ}$), что подтверждается наземными и лётными испытаниями, проведенными на ПАО «Казанский вертолётный завод».

Библиографический список

1. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 272 с.
2. Аладьев В.З., Богдьявичус М.А. Maple 6: Решение математических, статистических и инженерно-физических задач. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. — 824 с.
3. Николаев Е.И., Пантюхин К.Н. Исследование устойчивости вертолета с полозковым шасси на режиме раскрутки несущего винта на земле // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2012. №4. С. 44–54.
4. Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С., Гродко Л.Н., Лейканд М.А. Вертолеты. Расчет и проектиро-

- вание. Колебания и динамическая прочность. — М.: Машиностроение, 1967. — Т. 2. — 423 с.
5. Павленко Н.С. Выбор параметров и методы обеспечения прочности бесподшипниковых, в том числе жестких, несущих винтов // Вестник Московского авиационного института. 2015. Т. 22. № 2. С. 25—35.
 6. Сафонов А.И. О влиянии вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 2. С. 158—168.
 7. Сидоренко А.С. Динамическое состояние конструкции вертолета при нестационарном движении посадочной площадки // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 5. С. 34—42.

HELICOPTER DYNAMIC STABILITY IN THE GROUND SPIN-UP MODE WITH ALLOWANCE FOR BLADES FLEXIBILITY

Nikolaev E.I.^{1*}, Pantyukhin K.N.^{2**}

¹ Kazan Helicopters,

14, Tsetevskaya str., Kazan, 420085, Russia

² Kazan National Research Technical University,

KAI, 10, Karl Marks str., Kazan, 420111, Russia

* e-mail: nikolaev_ei@kazanhelicopters.com

** e-mail: Kostyapanty@gmail.com

Abstract

The study of helicopter dynamic stability is associated in most cases with such a phenomenon as ground resonance, which presents helicopter self-oscillations with increasing amplitude. The origin of this swaying consists in interaction of blades oscillations relative to the hinges, vertical in particular, with helicopter body on chassis oscillations.

Since helicopter presents a complex mechanism, assumptions and simplifications allowing saving computing resources and with sufficient accuracy easily correlated with the experiment were introduced while mathematical models building. At present, a researcher possesses considerable computing resources. Thus, one can afford building much more complicated models, allowing solving the problem of «ground» resonance computation in more detail.

The paper presents helicopter mathematical model, which body has six degrees of freedom, and flexible blades with three degrees of freedom in the attachment point to the hub. Helicopter alighting gear (chassis) is presented in the model by flexibility matrix. Helicopter equations of motion were obtained using second order Lagrange equation, and blades flexural oscillations equations were obtained with widely known Galerkin's method. Flexible blade mathematical model considers only the first three forms of hinges flexure-flexure-torsion oscillations.

Following the above-described mathematical model the complex of programs was developed using Maple and MATLAB. Within the range from zero to main rotor operating speed computation of helicopter dynamic instability zones on the ground was made. Comparison

of the results obtained by R. Coleman method and mathematical model with rigid blades for ANSAT helicopter revealed sufficient convergence. Mathematical models with rigid and flexible blades developed by the authors allow determine additional instability zones.

The model with flexible blades allows revealing a number of additional instability zones, which may have great significance.

Keywords: ground resonance, flexible blade, natural frequencies and forms.

References

1. И'ин М.М., Кolesnikov K.S., Saratov Yu.S. *Teoriya kolebanii* (Theory of oscillations). Moscow, MGTU im. N.E. Bauman, 2003, 272 p.
2. Alad'ev V.Z., Bogdyavichyus M.A. *Maple 6: Reshenie matematicheskikh, statisticheskikh i inzhenerno-fizicheskikh zadach* (Solving mathematical, statistical and engineering physical problems), Moscow, Laboratoriya Bazovykh Znanii, 2001, 824 p.
3. Nikolaev E.I., Pantyukhin K.N. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*, 2012, no. 4, pp. 44-56.
4. Mil' M.L., Nekrasov A.V., Braverman A.S., Grodko L.N., Leikand M.A. *Vertolety. Raschet i proektirovanie. Kolebaniya i dinamicheskaya prochnost'* (Helicopters: calculation and design. Oscillations and dynamic stability). Moscow, Mashinostroenie, 1967, vol. 2, 423 p.
5. Pavlenko N.S. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 25-35.
6. Safonov A.I. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 158-168.
7. Sidorenko A.S. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2010, vol. 17, no. 5, pp. 34-42.