

# ПРОЧНОСТЬ И ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

---

УДК 629.735

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ КЕССОНА КОНСТРУКЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ

Хуан Ш. \*, Костин В.А. \*\*, Лаптева Е.Ю. \*\*\*

*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,  
КНИТУ-КАИ, ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111, Россия*

*\* e-mail: hs-kai@mail.ru*

*\*\* e-mail: vakostin@kai.ru*

*\*\*\* e-mail: EYuLapteva@kai.ru*

---

Рассматривается задача восстановления кривых ползучести ребер четырехпоясного кессона, работающих при действии комплекса механической и температурной нагрузки. Используется модель суперэлементов для моделирования тонкостенных конструкций в расчете прямой задачи, при которой неизвестные секущие модули определяются методом последовательных приближений, решая обратную задачу. Для решения обратной задачи применяется функционал цели в форме квадрата невязки между экспериментальными и теоретическими значениями деформаций. Минимизация функционала ведётся итерационным методом с использованием аппарата функции чувствительности. Построение изохронных кривых напряжено-деформированного состояния (НДС) выполняется на базе технической теории ползучести Ю.Н. Работнова. Расчеты выполнены с использованием программных средств системы Matlab.

*Ключевые слова:* тонкостенные конструкции, изохронные кривые, анализ чувствительности, модель суперэлементов.

---

### Введение

Известно, что в условиях повышения температур, действующих на механически нагруженную конструкцию, возможны ее пластическая деформация и ползучесть. При этом физико-механические характеристики материала конструкции, полученные при стандартных испытаниях образцов, могут отличаться от их соответствующих значений при работе в составе конструкции. Представляется акту-

альным восстановление диаграмм деформирования по результатам натурных испытаний конструкции ЛА в целом, которые проводятся при ее отработке.

В качестве эффективного подхода при решении поставленной задачи предлагается использовать аппарат функций чувствительности. Информация о чувствительности конструкций к изменениям жесткостей ее элементов является очевидно важной и позволяет эффективно решать сложные задачи оп-

тимизации, относящиеся как к проектированию машин, так и к идентификации их параметров. С математической точки зрения эти задачи относятся к обратным. Современная теория их решения во многом связана с именем О.М. Алифанова и созданной им научной школы [1—4]. О.М. Алифановым рассматривались и решены многочисленные обратные задачи теплообмена, разработаны их теория и алгоритмизация. В многих случаях устойчивое решение основано на сведении обратной задачи к экстремальной постановке. В работе Б.Н. Петрова и П.Д. Крутько [5] показана возможность идентификации нестационарных параметров и приведены классы задач теории управления, которые могут решаться на основе алгоритма чувствительности. Вычисление чувствительности позволяет выделить переменные проектирования, изменение которых оказывает наиболее существенное влияние на рассматриваемые характеристики. Подход с анализом чувствительности оказывается особенно эффективным при наличии большого числа входных условий и условий нагружения и при больших размерностях переменных состояния и проектирования. Теория чувствительности как самостоятельное научное направление рассмотрена в монографии М.Л. Быховского [6]. Развитие современных конечно-элементных методов для анализа конструкций с ориентацией на функции чувствительности во многом основано на фундаментальных работах Н.В. Баничука. В своей книге [7] Н.В. Баничук изложил метод анализа чувствительности при проектировании конструкций, который дает информацию о том, какое влияние на функцию качества и ограничения окажет изменение проекта. Г.С. Розенбергом [8] исследуется возможность применения градиентного метода для отыскания оптимальной функции управления при точном измерении фазовых координат, а также для определения оптимальной программы управления. В работах В.А. Костина рассматривается применение градиентного метода для решения обратных нелинейных задач прочности тонкостенных конструкций. Привлечение сопряженных уравнений позволяет упростить анализ функционала качества и сократить объем проводимых вычислений [9]. И.Г. Черноуцким разработаны градиентные методы, которые сохраняют сходимость и эффективность для невыпуклых задач нелинейного программирования в условиях высокой степени целевых функционалов и высокой размерности вектора оптимизируемых параметров [10]. В 80-х гг. в работе Э. Хога, К. Чоя, В. Комкова [11] построена современная теория оптимального проектирования конструкций на базе метода анализа

чувствительности. Результаты применения алгоритма чувствительности при решении задач идентификации динамических объектов и дискретных систем нашли отражение в работах А.И. Рубана [12—14] в 90-х гг. В работе А.В. Кирильчика [15] приведен алгоритм идентификации параметров модели динамического объекта на основе оценок функций чувствительности, полученных в результате обработки экспериментальных данных на пробных точках. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная решению численным итерационным методом обратных задач термоупругости [16, 17] и, особенно, ползучести [18—20]. Например, в работах К.С. Бормотина решаются обратные задачи формообразования и определяются внешние силовые воздействия. При решении экстремальной задачи наиболее распространенными методами нелинейного программирования являются градиентные алгоритмы и методы анализа чувствительности. Однако в области авиаракетостроения остаётся актуальной коэффициентная обратная задача восстановления изохронных кривых ползучести, которые можно использовать для уточнения расчета прочности и проектирования конструкций, работающих в условиях высоких механических и тепловых нагрузок (сверх- и гиперзвуковые скорости).

#### Математическая формулировка задачи и ее решение

При постановке задачи предполагается, что имеются экспериментальные значения деформации  $f'_{\text{exp}}(z, t)$ , полученные при натуральных стендовых испытаниях тонкостенных конструкций, состоящих из ребер и панелей. Требуется определить истинную жесткость  $\beta_{ij} = (EF)_{ij}$  (здесь  $E$  — модуль упругости ребра,  $F$  — площадь поперечного сечения ребра) продольного ребра  $i$  на растяжение-сжатие в каждом расчетном сечении  $j$ . Переходя к математической постановке задачи для тонкостенной конструкции общего вида, получаем задачу оптимизации, т.е. требуется минимизировать функционал

$$J(f', \beta) = \sum_{i=0}^{n \times c} (f'_{\text{exp}i} - f'_i)^2 dz \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $n$  — количество рассматриваемых значений теоретических и экспериментальных деформаций ребер конструкции, определяемых методом суперэлементов [21];  $c = k-1$  — количество суперэлементов, разбиваемых сечениями  $i$  и  $i+1$  ( $i = 1 \dots k-1$ );  $f'_{\text{exp}i}$  — экспериментальные деформации;  $f'$  — рас-

четные или модельные деформации, которым соответствуют столбцы

$$\{f'_{\text{exp}}\} = \left\{ \{f'_{\text{exp}1}\}^T \dots \{f'_{\text{exp}e}\}^T \dots \{f'_{\text{exp}c}\}^T \right\}^T$$

и

$$\{f'\} = \left\{ \{f'_1\}^T \dots \{f'_e\}^T \dots \{f'_c\}^T \right\}^T;$$

$\beta$  — управляющий параметр — вектор-столбец жесткостей, в матричной форме

$$\{\beta\} = \left\{ \{\beta_1\}^T \dots \{\beta_e\}^T \dots \{\beta_c\}^T \right\}^T.$$

В итоге в вектор-матричной форме (1) примет вид

$$J = \left( \{f'_{\text{exp}}\} - \{f'\} \right)^T \left( \{f'_{\text{exp}}\} - \{f'\} \right) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Из условия минимума функционала (2) получаем уравнение для уточнения модельных значений вектора параметров упругости  $\beta$  путем вычисления его приращений  $\partial\beta$ :

$$[\Psi]^T [\Psi] \{\partial\beta\} = [\Psi]^T \left( \{f'_{\text{exp}}\} - \{f'\} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\{\partial\beta\}$  — вектор-столбец приращения параметров упругости, используемый для итерации:

$$\{\beta^{k+1}\} = \{\beta^k\} + e\{\partial\beta\}, \quad (4)$$

где  $k$  — шаг итерации;  $e$  — коэффициент.

В свою очередь, матрица  $\Psi(\beta, x)$  получена как производная вектор-функции деформаций  $f'$  по векторной переменной  $\beta$  и имеет вид

$$[\Psi(f', \beta)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f'_1}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial f'_1}{\partial \beta_j} & \dots & \frac{\partial f'_1}{\partial \beta_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f'_i}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial f'_i}{\partial \beta_j} & \dots & \frac{\partial f'_i}{\partial \beta_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f'_c}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial f'_c}{\partial \beta_j} & \dots & \frac{\partial f'_c}{\partial \beta_c} \end{pmatrix} \quad (i, j = \overline{1, c}), \quad (5)$$

где  $\Psi(f', \beta)$  — матрица чувствительности НДС к изменению значений параметров;

$$\frac{\partial f'_i}{\partial \beta_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f'_{i1}}{\partial \beta_{j1}} & \dots & \frac{\partial f'_{i1}}{\partial \beta_{js}} & \dots & \frac{\partial f'_{i1}}{\partial \beta_{jn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f'_{it}}{\partial \beta_{j1}} & \dots & \frac{\partial f'_{it}}{\partial \beta_{js}} & \dots & \frac{\partial f'_{it}}{\partial \beta_{jn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f'_{in}}{\partial \beta_{j1}} & \dots & \frac{\partial f'_{in}}{\partial \beta_{js}} & \dots & \frac{\partial f'_{in}}{\partial \beta_{jn}} \end{pmatrix} \quad (t, s = \overline{1, n})(i, j = \overline{1, c}). \quad (6)$$

Компоненты матриц (6) определяются в дальнейшем из уравнений равновесия, записанных в форме суперэлементов.

Для наглядности и конкретизации изложения в статье рассматривается четырехпоясный кессон квадратного сечения, один конец которого жестко закреплен, а на другом приложены осевая и моментная нагрузки. В это же время верхняя и нижняя панели кессона подвергаются температурным нагрузкам, которые постоянны по длине конструкции (рис. 1).

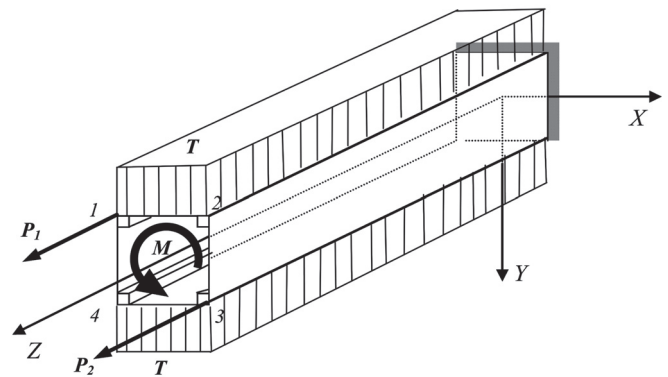


Рис. 1. Кессон с механической и температурной нагрузкой

Для установления соответствия между количеством тензодатчиков и теоретическим значением деформаций в работе используется не классический метод конечных элементов, а вариант в виде суперэлементов, тем более что достаточно плавное изменение НДС позволяет это сделать, уменьшая при этом трудоемкость за счет понижения порядка разрешающей системы уравнений. Согласно этому методу, для получения необходимых расчетных соотношений составляющие перемещения произвольной точки конструкции по координатам  $z$  и  $s$  представляются в следующем виде:

$$u(x, y, z) = \sum_1^M \vartheta_i(x, y) \phi_i(z) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, M); \quad (7)$$

$$f(x, y, z) = \sum_j^N r_j(x, y) \xi_j(z) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N), \quad (8)$$

где  $z$  — ось, перпендикулярная к плоскости сечения;  $\phi(z), \xi(z)$  — искомые обобщенные перемещения, которые зависят только от координаты  $z$ ;  $\vartheta(x, y), r(x, y)$  — функции расположения поперечных и продольных перемещений, могут рассматриваться как обобщенные координаты. Таким образом, расчетная модель в сечении  $z$  обладает  $M$  степенями свободы в поперечном и  $N$  — в продольном направлениях.

Точка пересечения сечения с осью  $z$  принимается за обобщенный узел. Каждый отсек по существу становится суперэлементом с обобщенными перемещениями в узлах.

Принимается допущение, что одномерные элементы ( $n$  ребер), соответствующие реальным силовым элементам, работают на растяжение-сжатие, а двумерные элементы ( $m$  панелей) — на сдвиг. Для учета работы панелей в продольном направлении на нормальные напряжения могут вводиться дополнительные продольные ребра с учетом коэффициента редуцирования эффективности работы панелей.

На основе принципа Лагранжа, выражая вариацию потенциальной энергии деформации и работу внешних сил на возможных перемещениях через предыдущие формы обобщенных перемещений, получим уравнение суперэлементов:

$$K^g F^g = L^g. \quad (9)$$

Здесь  $K^g$  — глобальная матрица жесткости;

$F^g$  — глобальная матрица-столбец обобщенных перемещений:

$$F^g = \{F^1 \dots F^e \dots F^k\}^T,$$

где  $F^e = \{\phi_1^e \dots \phi_M^e \xi_1^e \dots \xi_N^e\}^T$  ( $e = \overline{1, k}$ ,  $k$  — число сечений,  $N$  — число степеней свободы в продольном направлении;

$L^g = L_M^g + L_T^g$  — нагрузка, состоящая из механической и тепловой нагрузки.

При решении данной задачи считаем определяющими осевые деформации  $f'$ , а деформациями в плоскости нервюр пренебрегаем. Это позволяет упростить уравнение (9), а именно:

$$K^y F^y = L^y. \quad (10)$$

Здесь

$$F^y = \begin{Bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \vdots \\ \xi_N^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_N^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_f^e & & \\ & \ddots & \\ & & T_f^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1^1 \\ \vdots \\ \phi_M^1 \\ \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_N^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_N^k \end{Bmatrix} = T_f F^g, \quad (11)$$

где

$$T_f^e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N \times (M+N)}$$

В то же время

$$K^y = T_f K^g T_f^T, \quad T_f^T = T_f^{-1}, \quad L^y = T_f L^g.$$

В матричной форме (8) примет вид

$$\{f\} = \begin{bmatrix} [r_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [r_k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_N^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_N^k \end{Bmatrix} = [R] F^y. \quad (12)$$

Далее введем в рассмотрение матрицу  $T_d$  и используем её как дифференцирующую при конечно-разностной аппроксимации:

$$\{f'\} = \begin{Bmatrix} f'_{11} \\ f'_{12} \\ \vdots \\ f'_{1n} \\ \vdots \\ f'_{e1} \\ \vdots \\ f'_{k-1n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_d^e & T_d^e & & & & \\ & -T_d^e & T_d^e & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -T_d^e & T_d^e & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_n^1 \\ f_1^2 \\ \vdots \\ f_n^2 \\ f_1^3 \\ \vdots \\ f_n^k \end{Bmatrix} =$$

$$= T_d \{f\}, T_d^e = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (13)$$

где  $l_e$  — длина  $e$ -го суперэлемента.

Для определение элементов матрицы чувствительности  $\Psi$  выполняем следующие действия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial \beta_{js}} &= \frac{\partial (T_d \{f\})}{\partial \beta_{js}} = [T_d] \frac{\partial \{f\}}{\partial \beta_{js}} = [T_d] \frac{\partial (R \{F^y\})}{\partial \beta_{js}} = \\ &= [T_d][R] \frac{\partial \{F^y\}}{\partial \beta_{js}}. \end{aligned} \quad (14)$$

В свою очередь,  $\partial F^y / \partial \beta_{js}$  найдем из уравнения (10), предварительно продифференцировав его по  $\beta_{js}$ . Тогда получим

$$\frac{\partial K^y}{\partial \beta_{js}} F^y + K^y \frac{\partial F^y}{\partial \beta_{js}} = 0, \quad \frac{\partial F^y}{\partial \beta_{js}} = -(K^y)^{-1} \frac{\partial K^y}{\partial \beta_{js}} F^y. \quad (15)$$

Определив таким образом все коэффициенты матрицы  $\Psi$ , с помощью формул (3) и (4) развиваем метод последовательных приближений для уточнения жесткостей ребер, входящих в параметр  $\beta$ .

**Численный пример**

Вышеописанный подход был апробирован при следующих исходных данных: длина кессона  $l = 1$  м, ширина панели  $s = 0,15$  м, толщина панели  $\delta = 0,001$  м (для всех панелей),  $E = 5,88e^8$  Н/м<sup>2</sup>, площадь  $F = 0,0003$  м<sup>2</sup>,  $T = 250$  °С. Предполагается, что нам известны диаграммы деформирования  $\sigma - \epsilon$ , полученные при испытаниях стандартных образцов с учетом температуры [22]. Осевая нагрузка  $P$  (табл. 1), приложенная к ребрам 2 и 4 (см. рис. 1), одинакова; момент  $M_z = 1000$  Н·м.

Из-за отсутствия данных физического эксперимента численно с помощью метода конечных элементов были получены значения деформаций  $\{f'_{exp}\}$  путем решения прямой задачи. Эта нелинейная задача решена на основе секущих модулей методом переменных параметров упругости [23]. Для того чтобы эти результаты в дальнейшем использовать

Таблица 1

**Изменение несущей способности кессона  $P$  с течением времени**

Время, с	0	10	25	50	100
$P$ , Н	87500	69000	63500	55000	50000

в качестве ориентировочных значений физическое эксперимент, в них вносились случайные погрешности около 5%, характерные для измерений при фиксации деформаций конструкции и способа ее нагружения в натурном эксперименте. Теоретические и экспериментальные деформации представлены на рис. 2.

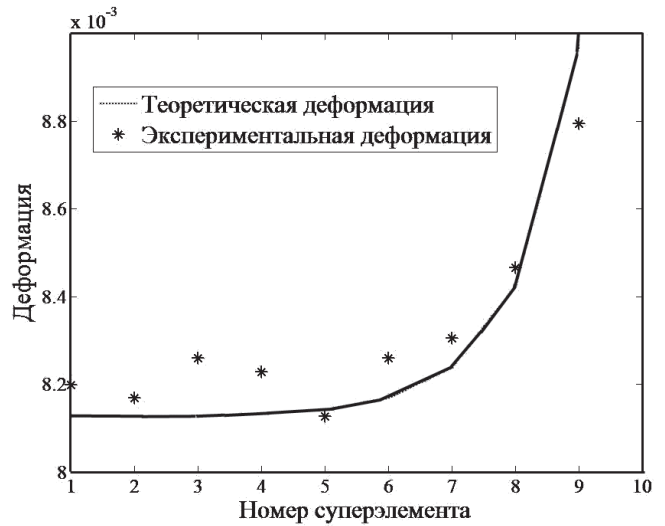


Рис. 2. Теоретические и экспериментальные деформации ребра 1 при  $t = 100$  с

Графики на рис. 3 показывают, как с ростом итерации уточняют расчетные деформации по экспериментальным значениям.

В табл. 2 приведено изменения модулей упругости ребра 1 за счет пластических деформаций и ползучести. Итерации № 1 и № 75 получены при  $t = 100$  с.

Сходимость функционала цели по шагам показана на рис. 4.

Для построения изохронных кривых выбираем самую нагруженную точку конструкции элемента 10. Выполняем регуляризацию и строим изохронные кривые ползучести (рис. 5).

**Выводы**

Выполненный расчёт позволяет сделать вывод о том, что применение функции чувствительности дает возможность целенаправленно организовать процесс итераций при поиске параметров упругости и строить изохронные кривые ползучести элементов конструкции. Результаты исследования могут быть полезны для дальнейшего развития методов идентификации и отработки тонкостенных конструкций по данным испытания, в том числе и в режиме ползучести.

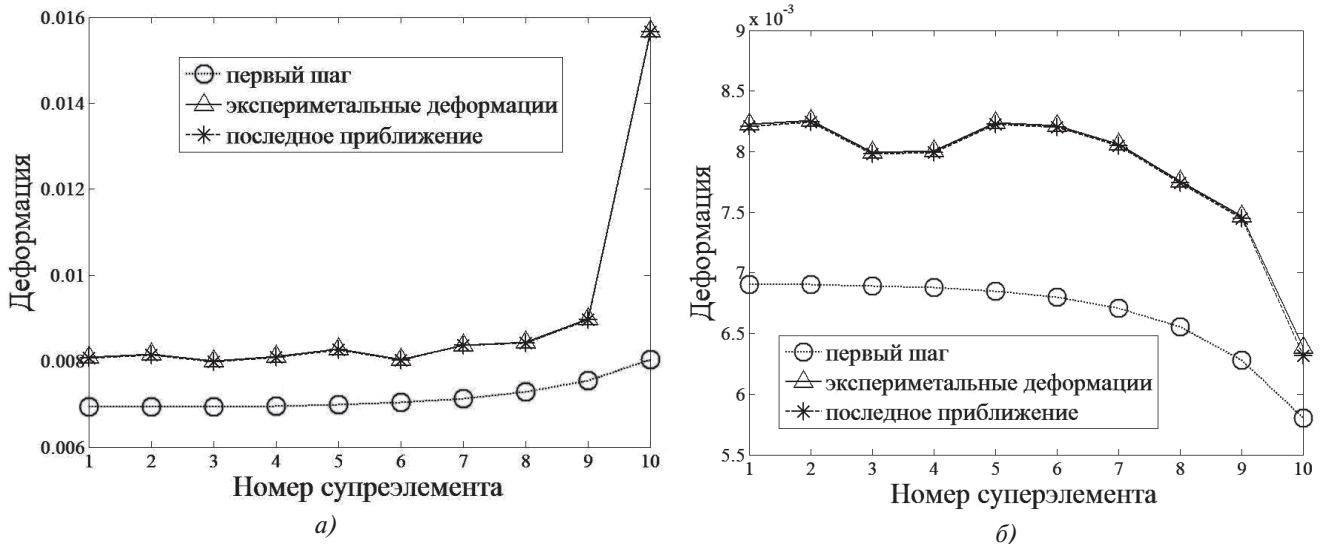


Рис. 3. Экспериментальные  $f'_{\text{exp}}$  и модельные  $f'$  деформации первого и последнего шага при  $t = 100$  с:  
 а — в ребре 1; б — в ребре 2

Таблица 2

К расчету кессона на ползучесть. Итерации

Номер суперэлемента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E$ первого шага итерации, МПа ( $T = 22^\circ\text{C}$ )	588,0	588,0	588,0	588,0	588,0	588,0	588,0	588,0	588,0	588,0
$E$ теоретический, МПа ( $T = 250^\circ\text{C}$ )	317,2	317,2	317,2	317,0	316,7	315,8	313,4	306,7	286,7	134,7
$E$ итерации №75, МПа	362,7	349,5	366,9	349,6	326,8	357,7	316,5	318,1	292,0	134,7

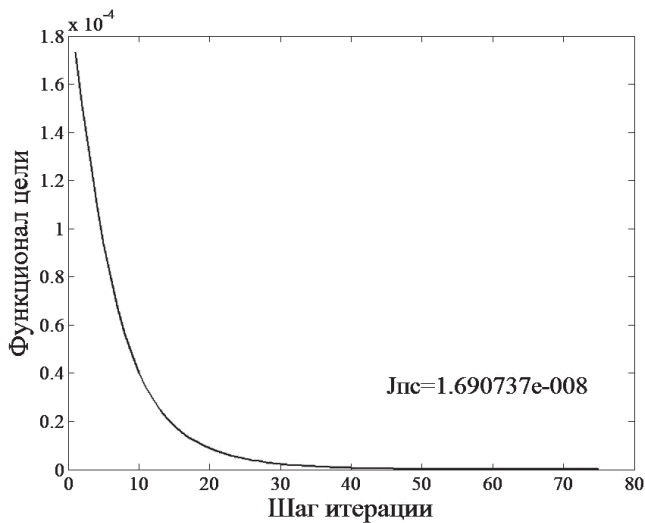


Рис. 4. Функции цели на основе моделей суперэлементов при  $t = 100$  с

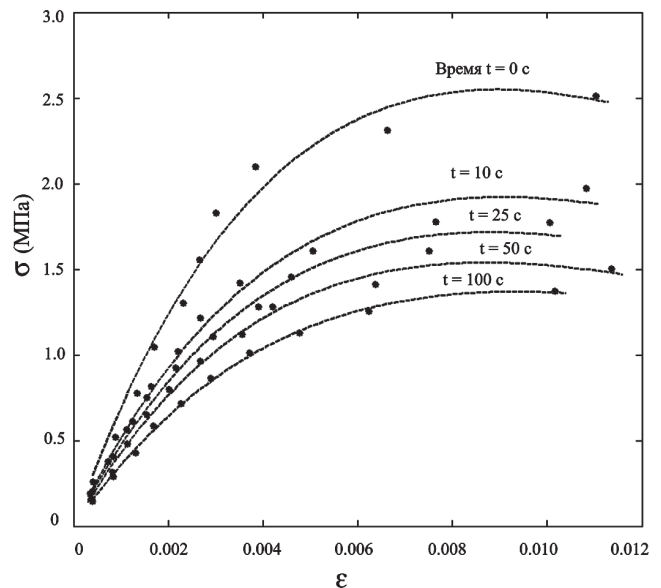


Рис. 5. Изохронные кривые ползучести

**Библиографический список**

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988. — 280 с.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. — М.: Наука, 1988. — 285 с.

3. Алифанов О.М., Иванов Н.А., Колесников В.А. Меднов А.Г. Определение температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т.16 № 5. С. 247-254.
4. Алифанов О.М., Иванов Н.А., Колесников В.А. Методика и алгоритм определения температурных зави-

- симостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т.19. № 5. С.14-20.
5. *Петров Б.Н., Крутько П.Д.* Применение теории чувствительности в задачах автоматического управления // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1970. № 2. С. 134 -140.
  6. *Быховский М.Л.* Основы динамической точности электрических и механических цепей. — М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1958. — 157 с.
  7. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. — М.: Наука, 1986. — 302 с.
  8. *Розенберг Г.С.* О применении градиентного метода для оптимизации динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 1971. № 6. С. 47-54.
  9. *Костин В.А.* Решение обратных задач прочности тонкостенных конструкций градиентным методом с привлечением сопряженных систем // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2002. № 3. С. 6-9.
  10. *Черноруцкий И.Г.* Градиентные методы оптимизации больших систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2014. № 4(200). С. 47-56.
  11. *Haug E.J., Choi K.K., Komkov V.* Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. — Vol. 177 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Orlando, FL, 1986. — 381 p.
  12. *Рубан А.И.* Чувствительность дискретных линейных моделей // Автоматика и телемеханика. 1991. № 9. С. 159-168.
  13. *Рубан А.И.* Чувствительность непрерывных линейных моделей // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 93-101.
  14. *Рубан А.И.* Чувствительность многомерных дискретных линейных систем с интегральными суммами и чистыми запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 38-48.
  15. *Кирильчик А.В.* Алгоритм идентификации динамических объектов на основе оценок функции чувствительности // IX Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием: Сборник материалов. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2013, 5 с.
  16. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Эрихман Н.Н.* Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т.16. № 6. С. 244-249.
  17. *Babaniyi O.A., Oberai A.A., Barbone P.E.* Direct error in constitutive equation formulation for plane stress inverse elasticity problem // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. Vol. 314, pp. 3-18. DOI: 10.1016/j.cma.2016.10.026
  18. *Бормотин К.С., Логвина В.С.* Метод решения итеративной регуляризацией обратных задач формообразования деталей // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. № 1. С. 77-84.
  19. *Бормотин К.С.* Метод решения обратных задач неупругого деформирования тонкостенных панелей // Вычислительные методы и программирование. 2017. Т. 18. № 4. С. 359-370.
  20. *Bormotin K.S., Taranukha N.A.* Mathematical modeling of inverse problems of forming taking into account the incomplete reversibility of creep strain // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. Vol. 59. No. 1, pp. 138-145. DOI: 10.1134/S0021894418010170
  21. *Ван Ч., Кан Л., Кретов А.С., Хуан Ш.* Прочностная проектировочная модель тонкостенных конструкций // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2016. № 1. С.116-122.
  22. *Белоус А.А., Поспелов И.И.* Несущая способность и ползучесть при изгибе тонкостенных балок // Труды ЦАГИ. № 931. М.: Бюро науч. информации ЦАГИ, 1964. 18 с.
  23. *Биргер И.А.* Круглые пластинки и оболочки вращения. — М.: Оборонгиз, 1961. — 368 с.

# APPLICATION OF THE SENSITIVITY ANALYSIS METHOD FOR THE SOLUTION OF THE INVERSE CREEP PROBLEM OF A WINGBOX STRUCTURE ON THE BASIS OF SUPER-ELEMENT MODEL

Huang Sh.\* , Kostin V.A.\*\* , Lapteva E.Yu.\*\*\*

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,  
KNRTU-KAI, 10, K. Marx str., Kazan, 420111, Russia

\* e-mail: hs-kai@mail.ru

\*\* e-mail: vakostin@kai.ru

\*\*\* e-mail: EYuLapteva@kai.ru

## Abstract

The research paper considers the problem of isochronic curves recovery of thin-walled design structures creep referred to deformations measured within the process of full-scale live experiment. It is known that as time passes creep deformations can appear in the construction. They are graphically usually represented as «deformation-time» curves measured by standardized sample testing. However, it has been found out that the deformation curves obtained during testing procedures of the construction differ from standard samples due to various reasons: power-based, technological, thermodynamical, etc. The article presents an approach to the corresponding curves construction, based on the processing of the results of the aircraft construction strength experiment.

Setting up the problem for general thin-walled constructions in mathematical terms, we obtain the necessity to optimize the objective functional in the form of the squared residual error of the corresponded theoretical and experimental deformations to the minimum. Working out the solution of the optimization problem is carried out iteratively using the sensitivity matrix, which is the derivative of the deformation function vector along the vector of elastic parameters variables. As the required parameters which control the stress-strained state (SSS) of the structure we choose the secant elastic modulus of the material. To solve a direct problem of the stress-strained state value determination the finite element method (FEM) in the form of a super-element model is used. This makes it possible to reduce the number of diverse required parameters at sufficient accuracy.

Due to the lack of data from the physical experiment, we obtain the numerical deformation values, using the FEM. This is done by solving a direct problem, where measure of inaccuracy typical for strain and load application gauging is introduced. A mathematical calculation has been made for a four-stiffener wingbox operating under the mechanical and temperature load. Figures of the first and second stiffeners show the change

of values of the theoretically obtained deformations in case of iterations in the direction of the corresponding experimental values. Isochronic creep curves have been constructed. The application of the sensitivity function has made it possible to purposefully organize the iteration process in the search for elastic parameters and to construct creep curves for the structural elements. The results of the research can be useful for further development of methods of identifying and improving of thin-walled structures according to the testing data, in case of creeping process as well.

**Keywords:** thin-wall constructions, isochronous curve, sensitivity analysis, super-element model

## References

1. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* (Inverse heat transfer problems), Moscow, Mashinostroenie, 1988, 280 p.
2. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody re-sheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* (Extreme methods for solving ill-posed problems and their application to inverse heat transfer problems), Moscow, Nauka, 1988, 288 p.
3. Alifanov O.M., Ivanov N.A., Kolesnikov V.A. Mednov A.G. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2009, vol. 16, no. 5, pp. 247-254.
4. Alifanov O.M., Ivanov N.A., Kolesnikov V.A. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2012, vol. 19, no. 5, pp. 14-20.
5. Petrov B.N., Krut'ko P.D. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1970, no. 2, pp. 134-140.
6. Bykhovskii M.L. *Osnovy dinamicheskoi tochnosti elektricheskikh i mekhanicheskikh tsepei* (Fundamentals of dynamic accuracy of electrical and mechanical circuits), Moscow, Izdatel'stvo AN SSSR, 1958, 157 p.
7. Banichuk N.V. *Vvedenie v optimizatsiyu konstruktсии* (Introduction to structural optimization), Moscow, Nauka, 1986, 302 p.
8. Rozenberg G.S. *Avtomatika i telemekhanika*, 1971, no. 6, pp. 47-54.
9. Kostin V.A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika*, 2002, no. 3, pp. 6-9.



10. Chernorutskii I.G. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie*, 2014, no. 4(200), pp. 47-56.
11. Haug E.J., Choi K.K., Komkov V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Vol. 177 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Orlando, FL, 1986, 381 p.
12. Ruban A.I. *Avtomatika i telemekhanika*, 1991, no. 9, pp. 159-168.
13. Ruban A I. *Avtomatika i telemekhanika*, 1992, no. 9, pp. 93-101.
14. Ruban A.I. *Avtomatika i telemekhanika*, 1996, no. 5, pp. 38-48.
15. Kiril'chik A.V. *IX Vserossiiskaya nauchno-tehnicheskaya konfe-rentsiiya studentov, aspirantov i molodykh uchenykh s mezhdunarodnym uchastiem. Sbornik materialov*. Krasnoyarsk, Siberian Federal University, 2013, pp. 1-5.
16. Vestyak V.A., Zemskov A.V., Erikhman N.N. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 244-249.
17. Babaniyi O.A., Oberai A.A., Barbone P.E. Direct error in constitutive equation formulation for plane stress inverse elasticity problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 314, pp. 3-18. DOI: 10.1016/j.cma.2016.10.026
18. Bormotin K.S., Logvina V.S. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 77-84.
19. Bormotin K.S. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, 2017, vol. 18, no. 4, pp. 359-370.
20. Bormotin K.S., Taranukha N.A. Mathematical modeling of inverse problems of forming taking into account the incomplete reversibility of creep strain. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, no. 1, pp. 138-145. DOI: 10.1134/S0021894418010170
21. Van Ch., Kan L., Kretov A.S., Khuan Sh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika*, 2016, no. 1, pp. 116-122.
22. Belous A.A., Pospelov I.I. *Nesushchaya sposobnost' i polzuchest' pri izgibe tonkostennykh balok*. Trudy TsAGI, no. 931, Moscow, Byuro nauchnoi informatsii TsAGI, 1964, 18 p.
23. Birger I.A. *Kruglye plastinki i obolochki vrashcheniya* (Round plates and rotation shells), Moscow, Oborongiz, 1961, 368 p.